1. Aufgabe 8 Punkte

Betrachten Sie die Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

(a) Leiten Sie durch Ausmultiplizieren aus der Matrixgleichung ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für $\vec{x} = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right]$ her.

(b) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für dieses LGS auf und bringen Sie sie mit dem Gauß-Algorithmus auf normierte Zeilenstufenform.

(c) Geben Sie alle Matrizen $\left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{smallmatrix}\right]$ an, die die gegebene Matrixgleichung lösen.

(a) Ausmultiplizieren ergibt

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ -2x_1 + x_3 & -2x_2 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

Vergleich der Einträge ergibt

$$\begin{array}{lccccccc} I & x_1 & & +2x_3 & & = & 0 \\ II & & x_2 & & +2x_4 & = & 1 \\ III & -2x_1 & & +x_3 & & = & 5 \\ IV & & -2x_2 & & +x_4 & = & -7 \end{array}$$

(b) Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right]$$

Gauß-Algorithmus:

$$\underset{IV+2II}{\overset{III+2I}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right] \underset{IV:5}{\overset{III:5}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{II-2IV}{\overset{I-2III}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

(c) Nur

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

löst die Matrixgleichung.

2. Aufgabe

13 Punkte

Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit den Eigenwerten 2 und 3 der zugehörigen Matrixabbildung $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$.

(a) Berechnen Sie die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte 2 und 3.

(b) Berechnen Sie die Eigenräume zu den Eigenwerten 2 und 3.

(c) Die Matrix

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

diagonalisiert die Matrix A, d.h. es gibt eine Diagonalmatrix D, so dass $A = SDS^{-1}$. Bestimmen Sie D.

(a) charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ -3 & 2-\lambda & -3 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\
&\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{2. Spalte}}{=}} (2-\lambda)\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (2-\lambda)\big((4-\lambda)(1-\lambda)+2\big) = (2-\lambda)\big(4-\lambda-4\lambda+\lambda^2+2\big) \\
&= (2-\lambda)\big(6-5\lambda+\lambda^2\big) = (2-\lambda)^2(3-\lambda)
\end{aligned}$$

Die algebraische Vielfachheit von 2 ist 2 und die algebraische Vielfachheit von 3 ist 1.

(b) zum Eigenwert 2:

$$\begin{aligned}
V_{\lambda=2} &= \text{Kern} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{2II+3I}{\underset{2III+I}{=}} \text{Kern} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} \mid s,t \in \mathbb{C} \right\} = \text{Spann}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

zum Eigenwert 3:

$$\begin{aligned}
V_{\lambda=3} &= \text{Kern} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{II+3I}{\underset{III+I}{=}} \text{Kern} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} -2s \\ 3s \\ s \end{bmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\} = \text{Spann}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

(c) D enthält auf der Diagonalen die Eigenwerte zu den entsprechenden Spalten. Wegen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in V_{\lambda=2}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in V_{\lambda=3} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in V_{\lambda=2}$$

ist

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben ist das folgende Skalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$\langle \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \rangle = a_1 b_1 + 2\, a_2 b_2 + 3\, a_3 b_3 + 4\, a_4 b_4$$

(a) Bestimmen Sie $\gamma \in \mathbb{R}$ so, dass $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ und $\left[\begin{smallmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ orthogonal sind bzgl. des gegebenen Skalarproduktes.

(b) Berechnen Sie die assoziierte Norm von $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ bezüglich des gegebenen Skalarproduktes.

(a) Die Matrizen sind orthogonal bzgl. des angegebenen Skalarprodukts, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt.

$$\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot \gamma + 3 \cdot (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4\gamma - 2$$

Also sind die Matrizen für $\gamma = \frac{1}{2}$ orthogonal.

(b)

$$\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rangle = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 25$$

Also

$$\| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \| = \sqrt{25} = 5$$

Alternativ

$$\begin{aligned} \| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \| &= \sqrt{\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rangle} \\ &= \sqrt{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

---

4. Aufgabe

12 Punkte

Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ der Polynome höchstens zweiten Grades mit der Basis

$$\mathcal{C} := \{c_1(x) = x^2 + x + 1, c_2(x) = x + 1, c_3(x) = 1\}$$

und die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x], p(x) \mapsto xp'(x)$$

(a) Berechnen Sie den Koordinatenvektor von $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{C}$.

(b) Berechnen Sie die darstellende Matrix $L_\mathcal{C}$ der linearen Abbildung L bzgl. der Basis $\mathcal{C}$.

$\mathcal{D}$ ist eine weitere Basis von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ von der nur die Matrix T des Basiswechsels von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ bekannt ist:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Zeichnen Sie ein (kommutatives) Diagramm, das die Beziehung zwischen $L_\mathcal{C}, L_\mathcal{D}$ und T veranschaulicht.

(d) Berechnen Sie die darstellende Matrix $L_\mathcal{D}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{D}$.

(a) Ansatz:

$$ax^2 + bx + c = \lambda_1(x^2 + x + 1) + \lambda_2(x + 1) + \lambda_3 \cdot 1 = \lambda_1 x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)x + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{array}{rlcl} I & \lambda_1 = a & & \\ II & \lambda_1 + \lambda_2 = b & \underset{\text{II-I}}{\Rightarrow} & \lambda_2 = b - a \\ III & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c & \underset{\text{III-II}}{\Rightarrow} & \lambda_3 = c - b \end{array}$$

Koordinatenvektor

$$\mathcal{K}_{\mathcal{C}}(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a \\ b - a \\ c - b \end{bmatrix}$$

(b) Benutze den Algorithmus aus dem Skript:
Bilder der Basisvektoren:

$$\begin{array}{lclcl} L(x^2 + x + 1) & = & x \cdot (2x + 1) & = & 2x^2 + x \\ L(x + 1) & = & x \cdot 1 & = & x \\ L(1) & = & x \cdot 0 & = & 0 \end{array}$$

Koordinaten:

$$\begin{array}{lcll} \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(2x^2 + x) & = & \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} & \text{oder} \quad 2x^2 + x = 2(x^2 + x + 1) + (-1)(x + 1) + (-1) \cdot 1 \\ \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(x) & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} & \text{oder} \quad x = 0(x^2 + x + 1) + 1 \cdot (x + 1) + (-1) \cdot 1 \\ \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(0) & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{oder} \quad 2x^2 + x = 0(x^2 + x + 1) + 0(x + 1) + 0 \cdot 1 \end{array}$$

darstellende Matrix

$$L_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{L_{\mathcal{C}}} & \mathbb{R}^3 \\ {\scriptstyle T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{L_{\mathcal{D}}} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

(d) T invertieren

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{I-III \to III}{\overset{III \to I}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Also

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{D}} &= TL_{\mathcal{C}}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$