Lösung zur Oktober-Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

---

1. Aufgabe

(8 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$.

(a) Bestimmen Sie die Determinante von B in Abhängigkeit des Parameters a, indem Sie den Laplaceschen Entwicklungssatz auf die 2. Zeile anwenden.

(b) Für welche Werte von a ist B invertierbar?

(a) **(5 Punkte)**

Zweifaches Anwenden von Laplace'schem Entwicklungssatz:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & a \end{bmatrix} = (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & a \end{bmatrix} + 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & a \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & a \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & a \end{bmatrix} + 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = (2a - 12) \quad + \quad 3 \cdot 2$$

Es ergibt sich

$$\det B = 2a - 6.$$

(b) **(3 Punkte)**

B ist invertierbar $\quad \Leftrightarrow \quad \det B \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq 3.$

---

2. Aufgabe (11 Punkte)

Gegeben sind die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & -8 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(a) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems (LGS) $A\vec{x} = \vec{b}$ in normierte Zeilenstufenform (NSZF) und bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

(b) Bestimmen Sie den Kern von A.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von A.

(a) **(7 Punkte)**

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 4 & 4 & 7 \\ -4 & -8 & 0 & 3 & 5 & -3 \end{array}\right].$$

NZSF:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right],$$

Auflösen nach den Variablen:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1, \\ x_4 &= 2, \\ x_5 &= -1. \end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) **(2 Punkte)**

Die Basisvektoren des Kerns sind:

$$v_1 = [-2, 1, 0, 0, 0]^T, \quad v_2 = [0, 0, 1, 0, 0]^T,$$

also ist

$$\text{Kern}A = \left\{ r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) **(2 Punkte)**

x_1, x_4, x_5 sind Kopfvariablen in der NZSF von A
$\rightsquigarrow$ die 1., 4. und 5. Spalte von A bilden eine Basis von Bild A. Basis:

$$\mathcal{B} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \}.$$

<u>Alternativ</u> z.B. mit Dimensionssatz: $5 = \dim \mathbb{R}^5 = \dim \operatorname{Kern} A + \dim \operatorname{Bild} A$
$\Longrightarrow \operatorname{Bild} A = \mathbb{R}^3$, die Standardbasis ist also Basis des Bildes.

---

3. Aufgabe (11 Punkte)

Gegeben sind der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt sowie die folgende Basis des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Benutzen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren, um $\mathcal{B}$ in eine Orthonormalbasis (ONB) $\mathcal{B}_{\text{ONB}}$ des $\mathbb{R}^3$ zu überführen.

(b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\vec{v} := \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$ bezüglich folgender ONB des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{C}_{\text{ONB}} := \left\{ \vec{w}_1 := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \vec{w}_2 := \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}, \vec{w}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) **(8 Punkte)**

Berechnung der Norm von b_1: $||b_1|| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$.

$$\rightsquigarrow q_1 = \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Orthogonalisierung von b_2 auf q_1

$$\ell_2 = b_2 - \langle b_2, q_1 \rangle q_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{25} \langle \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \rangle \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{25}{25} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Berechnung der Norm von ℓ_2: $||\ell_2|| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2} = 5$.

$$\rightsquigarrow q_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Orthogonalisierung von b_3 auf q_1 und q_2

$$\begin{aligned}
\ell_3 &= b_3 - \langle b_3, q_1\rangle q_1 - \langle b_3, q_2\rangle q_2 \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{25}\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}\rangle \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{25}\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\rangle \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{2}{5}\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Berechnung der Norm von ℓ_3, $||\ell_3|| = 5$.

$\rightsquigarrow q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

(b) **(3 Punkte)**

Mit der orth. Matrix $Q = [\vec{w}_1\ \vec{w}_2\ \vec{w}_3]$ bzw. $Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$,

gilt $Q^T\vec{v} = \vec{v}_{\mathcal{C}}$, also mit $Q^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$v_{\mathcal{C}} = Q^T\vec{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}.$

---

4. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben sind die zwei Basen $\mathcal{B}_1 := \{x+1, x+2\}$ und $\mathcal{B}_2 := \{2x+3, x+2\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$. Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ ist $L_{\mathcal{B}_1} := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}_2}$ von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$ sowie $K_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)$.

(b) Die Transformationsmatrix für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$ ist durch $S := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie S^{-1} sowie $L_{\mathcal{B}_2}$, die darstellende Matrix von L bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$.

(a) **(4 Punkte + 1 Punkt)**

(i) Aufstellen des LGS aus Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} \lambda_1(2x+3) + \lambda_2(x+2) &= ax+b \\ \Longrightarrow \qquad a &= 2\lambda_1 + \lambda_2, \\ b &= 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{aligned}$$

Lösung des LGS:

$$\lambda_1 = 2a - b, \quad \lambda_2 = 2b - 3a.$$

Lösung: $K_{\mathcal{B}_2} : \mathbb{R}_{\leq 1} \to \mathbb{R}^2, \quad ax + b \mapsto \begin{bmatrix} 2a - b \\ 2b - 3a \end{bmatrix}.$

(ii) Es ist $K_{\mathcal{B}_2}^{-1}\Big(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\Big) = a(2x+3) + b(x+2) \quad \big(= (2a+b)x + (3a+2b)\big).$

(b) **(2 + 3 Punkte)**

(i) Berechnung der Inversen von S:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

Es ist also $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(ii) Berechnung der darstellenden Matrix bezüglich $\mathcal{B}_2$:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}_2} &= S \circ L_{\mathcal{B}_1} \circ S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$
