Lösung zur April-Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

---

1. **(11 Punkte)** Gegeben ist die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \\ 3 & 6 & 0 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$ sowie der Vektor $\vec{b} := \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf, und bringen Sie diese in normierte Zeilenstufenform.
   b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems (LGS) $A\vec{x} = \vec{b}$.
   c) Bestimmen Sie Kern(A).
   d) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von A.
   e) Bestimmen Sie den Rang von A.

(a) Erweiterte Koeffizientenmatrix: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 7 \\ 3 & 6 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right]$

Berechnung der normierten Zeilenstufenform

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 7 \\ 3 & 6 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(b) $x_1 = -2x_2,\ x_4 = 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}$

(c) Der Kern von A ist die Lösungsmenge des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$, die sich aus b) ablesen lässt.

Es ergibt sich $\text{Kern}(A) := \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}$.

(d) Die Spalten von A, in denen in der NZSF von A Kopfvariablen stehen, bilden eine Basis des Bildes von A.

Also ist $\mathcal{B}_{\text{Bild}(A)} : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$.

(e) Der Rang von A entspricht der Anzahl der Kopfvariablen in der ZSF von A, also ist $\text{Rang}(A) = 2$.

---

2. **(14 Punkte)** Gegeben ist die Matrix $C := \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$.

   a) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von C ist.
   b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von C.
   c) Bestimmen Sie eine Diagonalisierung von C, d.h. Matrizen S, S^{-1} und D mit D eine Diagonalmatrix, so dass $C = SDS^{-1}$ gilt.
   d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dfrac{d\vec{y}}{dt} = C\vec{y}(t),\ \vec{y}(5) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(a) Es ist $C \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, also ist $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von C zum Eigenwert 2.

(b) Berechnung der Eigenwerte: Es ist $C - \lambda I = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 6 & -2-\lambda \end{bmatrix}$, also

$$\mathrm{char}(C) = \det(C - \lambda I) = (5-\lambda)(-2-\lambda) + 12 = -10 - 3\lambda + \lambda^2 + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Berechnung des Eigenraums zu $\lambda = 1$: Lösung des homogenen LGS:

$$C - I = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}..$$

Hieraus und aus (a) ergibt sich also für die Eigenräume

$$V_{\lambda_1=1} = \mathrm{Kern}(C - I) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}, \quad V_{\lambda_2=2} = \mathrm{Kern}(C - 2I) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}.$$

(c) In der Diagonalmatrix D stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen, in S die zugehörigen Eigenvektoren:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Berechnung von $S^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

(d) Der gegebene Startwert ist ein Eigenvektor von C zum Eigenwert 2, also ist die Lösung des AWPs gegeben durch

$$y(t) = e^{2(t-5)} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{2(t-5)} \\ 6e^{2(t-5)} \end{bmatrix}.$$

---

3. **(6 Punkte)** Gegeben ist der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle r_2x^2 + r_1x + r_0, s_2x^2 + s_1x + s_0\rangle := 2r_2s_2 + r_1s_1 + r_0s_0$$

für $r_2x^2 + r_1x + r_0, s_2x^2 + s_1x + s_0 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis $\mathcal{B} := \{b_1 := x^2 + x + 1,\ b_2 := 2x^2 - 2x - 2,\ b_3 := x - 1\}$ an, um $\mathcal{B}$ in eine Orthonormalbasis zu überführen.

Normierung des ersten Vektors: $\langle x^2 + x + 1, x^2 + x + 1\rangle = 2 + 1 + 1 = 4 \quad \Rightarrow ||x^2 + x + 1|| = \sqrt{4} = 2$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{1}{||x^2 + x + 1||}(x^2 + x + 1) = \frac{1}{2}(x^2 + x + 1).$$

Orthogonalisierung des zweiten Vektors: $\ell_2 = b_2 - \langle b_2, q_1\rangle q_1 = b_2 - 0 \cdot q_1 = b_2.$

Normierung des zweiten Vektors: $\langle 2x^2 - 2x - 2, 2x^2 - 2x - 2\rangle = 8 + 4 + 4 = 16 \quad \Rightarrow ||2x^2 - 2x - 2|| = \sqrt{16} = 4$

$$\Rightarrow q_2 = \frac{1}{||2x^2 - 2x - 2||}(2x^2 - 2x - 2) = \frac{1}{4}(2x^2 - 2x - 2) = \frac{1}{2}(x^2 - x - 1).$$

Orthogonalisierung des dritten Vektors: $\ell_3 = b_3 - \langle b_3, q_1\rangle q_1 - \langle b_3, q_2\rangle q_2 = b_3 - 0 \cdot b_1 - 0 \cdot b_2 = b_3.$

Normierung des dritten Vektors: $\langle x - 1, x - 1\rangle = 0 + 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow ||x - 1|| = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow q_3 = \frac{1}{||x - 1||}(x - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1).$$

$$\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}: \quad \{\frac{1}{2}(x^2 + x + 1), \frac{1}{2}(x^2 - x - 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1)\}$$

4. **(9 Punkte)** Gegeben sind die drei Basen des Vektorraums $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$:

$$\mathcal{B}_1 := \{x+2,\, 3x+5\}\,, \quad \mathcal{B}_2 := \{x+2,\, 2x+3\}\,, \quad \mathcal{B}_3 := \{x+1,\, 2x+1\}$$

Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_3$ ist gegeben durch $L_{\mathcal{B}_3} := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $ax+b$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$.

b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_3$ nach $\mathcal{B}_1$.

c) Die Transformationsmatrix S beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_3$ nach $\mathcal{B}_2$ und ihre inverse Matrix S^{-1} sind gegeben durch

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $L_{\mathcal{B}_2}$.

(a) Ansatz: Es sollen λ_1, λ_2 bestimmt werden so, dass

$$ax+b \;=\; \lambda_1(x+2) + \lambda_2(3x+5).$$

Aufstellen des zugehörigen LGS und der zugehörigen erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & = & a \\ 2\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & = & b \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 5 & b \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 5 & b \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2a-b \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5a+3b \\ 0 & 1 & 2a-b \end{array}\right]$$

Es ergibt sich $\lambda_1 = -5a+3b$, $\lambda_2 = 2a-b$, also ist der Koordinatenvektor von $ax+b$ gegeben durch

$$K_{\mathcal{B}_1}(ax+b) = \begin{bmatrix} -5a+3b \\ 2a-b \end{bmatrix}.$$

(b) Es ist

$$K_{\mathcal{B}_3}^{-1} \;:\; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x], \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \mapsto \alpha(x+1) + \beta(2x+1) \;=\; (\alpha+2\beta)x + (\alpha+\beta).$$

und ($K_{\mathcal{B}_1}$ ist aus (a) ablesbar):

$$K_{\mathcal{B}_1} : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2 \;:\; ax+b \mapsto \begin{bmatrix} -5a+3b \\ 2a-b \end{bmatrix}.$$

Also ist

$$K_{\mathcal{B}_1} \circ K_{\mathcal{B}_3}^{-1} : \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -5(\alpha+2\beta) + 3(\alpha+\beta) \\ 2(\alpha+2\beta) - (\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha - 7\beta \\ \alpha + 3\beta \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt

$$T = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}..$$

(c) Es ist $L_{\mathcal{B}_3} \;=\; S \circ L_{\mathcal{B}_3} \circ S^{-1}$, also

$$L_{\mathcal{B}_2} \;=\; \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$