Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 09
O. Holtz/M. v. Renesse/K. Roegner 22.7.2009

Juli – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** oder eine Begründung an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3},\ B := \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2},\ C := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

a) Bestimmen Sie AB.
b) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} zu A.
c) Bestimmen Sie die Determinante von C, indem Sie den Laplaceschen Entwicklungssatz auf die 2. Zeile anwenden.

2. Aufgabe 12 Punkte

Gegeben ist der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$.

a) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^3$ an, um $\mathcal{B}$ in eine Orthonormalbasis zu überführen.

b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\begin{bmatrix} -2 \\ 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ bezüglich der **Orthonormalbasis** $\mathcal{C} := \left\{ \vec{c}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{c}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \vec{c}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$.

3. Aufgabe 7 Punkte

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2,2};\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto x_1 \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, für die $L(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ gilt.
b) Bestimmen Sie den Kern von L.

4. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben ist die Basis $\mathcal{D} := \{3x+1,\ 4x+1\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$. Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bezüglich der Basis $\mathcal{D}$ ist gegeben durch $L_{\mathcal{D}} := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Bestimmen Sie $K_{\mathcal{D}}$, die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bezüglich der Basis $\mathcal{D}$.
b) Bestimmen Sie die Inverse $K_{\mathcal{D}}^{-1}$ der Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{D}}$.
c) Bestimmen Sie $L(ax+b)$.