Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
L. Knipping, R. Nabben, R. Patterson, M. Scheutzow

WS 12/13
20.02.2013

Februar – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure

Variante A

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Ohne Begründung und/oder vollständigen Rechenweg gibt es keinen Punkt.

1. Aufgabe — 11 Punkte

Gegeben sei das folgende reelle lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -5 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & & & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 4 \end{array}.$$

(a) Stellen Sie die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $[\,A\,|\,\vec{b}\,]$ auf und bringen Sie diese in normierte Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(A)$ und $\mathrm{Kern}(A)$.

(d) Ist die zu A zugehörige Matrixabbildung injektiv? Ist sie surjektiv?

2. Aufgabe — 10 Punkte

Gegeben seien die Matrizen

$$B_1 := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B_3 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) Bestimmen Sie $\det(B_1)$ mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

(b) Bilden die Spalten von B_1 eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

(c) Bestimmen Sie $\det(B_2)$.

(d) Bestimmen Sie $\det(B_3)$.

3. Aufgabe — 10 Punkte

Gegeben sei die Matrix $C := \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von C.

(b) Ist C diagonalisierbar?

(c) Ist C invertierbar?

4. Aufgabe — 12 Punkte

Gegeben sei mit $\mathcal{B} := \{2x,\, x+1\}$ eine Basis des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$, sowie die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]\ ;\quad ax + b \mapsto (3a-3b)x + (2a-2b).$$

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(L)$.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

(c) Ein Eigenwert von L ist 0. Geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor an.

(d) Sei $\mathcal{C} = \{p_1,\, p_2\}$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ und $S_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ die Transformationsmatrix beim Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$. Bestimmen Sie $\mathcal{C}$.

5. Aufgabe — 8 Punkte

Gegeben sei die Menge $M := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; a - c = 0 \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

(b) M ist dreidimensional. Geben Sie eine Matrix A an, sodass $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A \right\}$ eine Basis von M ist und begründen Sie, dass $\mathcal{B}$ mit dem gewählten A eine Basis von M ist.

(c) Zeigen Sie, dass $N := \left\{ B \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; B^2 = 0 \right\}$ kein Teilraum von M ist.

6. Aufgabe — 9 Punkte

Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt und die Matrixabbildung $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. P beschreibt die Spiegelung an der Geraden $\mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von P? Falls ja, zu welchem Eigenwert gehört er?

(b) Gibt es einen zu $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ linear unabhängigen Eigenvektor von P? Falls ja, zu welchem Eigenwert gehört er?

(c) P ist diagonalisierbar.
Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2,2}$, sodass $P = S \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S^{-1}$ gilt.

(d) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = P\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(7) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.