Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 12/13

L. Knipping, R. Nabben, R. Patterson, M. Scheutzow 20.02.2013

Februar – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze Klausurvariante A

---

1. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben sei das folgende reelle lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -5 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & & & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 4 \end{array} .$$

(a) Stellen Sie die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ auf und bringen Sie diese in normierte Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

(c) Bestimmen Sie Bild(A) und Kern(A).

(d) Ist die zu A zugehörige Matrixabbildung injektiv? Ist sie surjektiv?

(a) **(4 Punkte)**

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[-\mathrm{I}]{\mathrm{III}+2\mathrm{I}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[\mathrm{III}-3\mathrm{II}]{\mathrm{I}+\mathrm{II}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \mathrm{NZSF}([A|\vec{b}])$$

(b) **(3 Punkte)**

Ausgehend von der NZSF in a): Die Nichtkopfvariablen parametrisieren die Lösungsmenge. Setze: $x_3 := s,\ x_4 := t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Kopfvariablen: $x_1 + s - t = 3 \Leftrightarrow x_1 = 3 - s + t$ und $x_2 + 2s = -2 \Leftrightarrow x_2 = -2 - 2s$. Somit ist die Lösungsmenge des LGS:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 3-s+t \\ -2-2s \\ s \\ t \end{bmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{s \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R}}_{\mathrm{Kern}(A)} \right\}$$

(c) **(2 Punkte)**

Eine Basis von Bild(A) bilden die Spalten der Matrix A, bei denen in der NZSF ein Kopf steht. Nach a) sind dies die erste und die zweite Spalte von A. Somit ist $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Die Lösungsmenge in b) setzt sich aus einer partikulären Lösung des inhomogenen LGS und den Lösungen des zugehörigen homogenen LGS, also Kern(A) zusammen.

Somit ist $\mathrm{Kern}(A) = \left\{ s \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(d) **(2 Punkte)**

Nach c) ist $\mathrm{Kern}(A) \neq \left\{\vec{0}\right\}$. Somit ist die zu A zugehörige Matrixabbildung nicht injektiv.

$\mathrm{Bild}(A) \neq \mathbb{R}^3$, da nach c) Bild$(A)$ von zwei Vektoren aufgespannt werden kann, der $\mathbb{R}^3$ jedoch dreidimensional ist. Somit ist die zu A zugehörige Matrixabbildung auch nicht surjektiv.

---

2. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben seien die Matrizen

$$B_1 := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) Bestimmen Sie $\det(B_1)$ mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

(b) Bilden die Spalten von B_1 eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

(c) Bestimmen Sie $\det(B_2)$.

(d) Bestimmen Sie $\det(B_3)$.

(a) **(4 Punkte)**

$$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1)^{2+3} \cdot (4) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{3. Zeile}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} -4((-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix})$$

$$= -4[(-1 \cdot 1 - 3 \cdot 2) - (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2)] = -4(-7 + 4) = 12$$

(b) **(2 Punkte)** Vier lin. unabh. Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$, da $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Die vier Spaltenvektoren von B_1 sind lin. unabh., da nach a) $\det(B_1) = 12 \neq 0$. Somit bilden sie auch eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

(c) **(2 Punkte)** B_2 ist bis auf das Tauschen der ersten und zweiten Zeile identisch mit B_1. Beim Vertauschen zweier Zeilen einer Matrix ändert sich das Vorzeichen der Determinante: $\det(B_2) = -\det(B_1) = -12$.

(d) **(2 Punkte)** Die Spaltenvektoren von B_1 seien $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$. Dann ist $B_3 = \left[\vec{b}_1 \ (-3) \cdot \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4\right]$ und

$$\det(B_3) = \det\left(\left[\vec{b}_1 \ (-3) \cdot \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4\right]\right) = -3 \cdot \det\left(\left[\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4\right]\right) = -3 \cdot \det(B_1) = -3 \cdot 12 = -36.$$

---

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Matrix $C := \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von C.

(b) Ist C diagonalisierbar?

(c) Ist C invertierbar?

(a) **(6 Punkte)**

C ist eine obere Dreiecksmatrix. Die Eigenwerte stehen somit auf der Diagonalen: $\lambda_{1/2} = 3$ und $\lambda_3 = 0$.

Die Eigenräume sind dann:

$$V_{\lambda_{1/2}} = \text{Kern}(C - 3I_3) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \underset{-\frac{1}{3}\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{=}} \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

und

$$V_{\lambda_3} = \text{Kern}(C - 0I_3) = \text{Kern}(C) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) \underset{\frac{1}{3}\text{I}}{\overset{\text{III}-3\text{II}}{=}} \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

(b) **(2 Punkte)** $\lambda_{1/2}$ ist ein doppelter Eigenwert, die alg VFH ist somit 2. Die geom VFH von $\lambda_{1/2}$ ist 1, da nach $V_{\lambda_{1/2}}$ von einem lin. unabh. Vektor aufgespannt wird und somit $\dim(V_{\lambda_{1/2}}) = 1$ gilt.C ist nicht diagonalisierbar, da geom VFH $(\lambda_{1/2}) = 1 \neq 2 =$ alg VFH $(\lambda_{1/2})$.

(c) **(2 Punkte)** Nach a) gilt $V_{\lambda_3} = \text{Kern}(C - 0I_3) = \text{Kern}(C) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \neq \left\{\vec{0}\right\}$. Somit ist C nicht invertierbar.

---

4. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei mit $\mathcal{B} := \{2x, \, x + 1\}$ eine Basis des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$, sowie die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \ ; \quad ax + b \mapsto (3a - 3b)x + (2a - 2b).$$

(a) Bestimmen Sie Kern(L).

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

(c) Ein Eigenwert von L ist 0. Geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor an.

(d) Sei $\mathcal{C} = \{p_1, p_2\}$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ und $S_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ die Transformationsmatrix beim Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$. Bestimmen Sie $\mathcal{C}$.

(a) **(4 Punkte)**
Kern$(L) = \{ax + b \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \mid L(ax + b) = 0x + 0\}$
$L(ax + b) = (3a - 3b)x + (2a - 2b) = 0x + 0$
Koeffizientenvergleich führt auf das LGS $3a - 3b = 0$, $2a - 2b = 0$. Für die zweite Gleichung gilt $2a - 2b = 0 \Leftrightarrow 2a = 2b \Leftrightarrow a = b$, was kein Widerspruch zur ersten Gleichung ist.
Somit ist Kern$(L) = \{ax + a \mid a \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{x + 1\}$.

(b) **(4 Punkte)**
spaltenweise Bestimmung von $L_{\mathcal{B}}$:
$L_{\mathcal{B}}\vec{e}_1 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1))) = K_{\mathcal{B}}(L(2x)) = K_{\mathcal{B}}(6x + 4) = K_{\mathcal{B}}((2x) + 4(x + 1)) \overset{lin.}{=} K_{\mathcal{B}}(2x) + 4 \cdot K_{\mathcal{B}}(x + 1) = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$
$L_{\mathcal{B}}\vec{e}_2 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2))) = K_{\mathcal{B}}(L(x + 1)) = K_{\mathcal{B}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

(c) **(2 Punkte)**
Nach a) ist $x + 1 \in$ Kern(L). Somit $x + 1$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 von L, da $L(x + 1) = 0 = 0 \cdot (x + 1)$.

(d) **(2 Punkte)** Für die Spalten von S gilt:
$S\vec{e}_1 = K_{\mathcal{C}}(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1)) = K_{\mathcal{C}}(2x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ und
$S\vec{e}_2 = K_{\mathcal{C}}(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2)) = K_{\mathcal{C}}(x+1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Daraus folgt das LGS $1 \cdot p_1 - 1 \cdot p_2 = 2x$, $1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 = x + 1$. Die zweite Gleichung ergibt $p_1 = x + 1$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, erhält man $x + 1 - p_2 = 2x \Leftrightarrow p_2 = -x + 1$. Somit ist $\mathcal{C} = \{x + 1,\ -x + 1\}$.
alternativ: Für das i-te Basiselement in $\mathcal{C}$ gilt $p_i = K_{\mathcal{C}}^{-1}(\vec{e}_i) = K_{\mathcal{B}}^{-1}(S^{-1}(\vec{e}_i))$. S^{-1} bestimmen:
$[S|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{II+I}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{I−II}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = [I_2|S^{-1}]$.
Dann gilt für $c_p = K_{\mathcal{B}}^{-1}(S^{-1}(\vec{e}_1)) = K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot (2x) + 1 \cdot (x + 1) = x + 1$ und für
$p_2 = K_{\mathcal{B}}^{-1}(S^{-1}(\vec{e}_2)) = K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -1 \cdot (2x) + 1 \cdot (x + 1) = -x + 1$.
Somit ist $\mathcal{C} = \{x + 1,\ -x + 1\}$.

---

5. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei die Menge $M := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; a - c = 0 \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

(b) M ist dreidimensional. Geben Sie eine Matrix A an, sodass $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A \right\}$ eine Basis von M ist und begründen Sie, dass $\mathcal{B}$ mit dem gewählten A eine Basis von M ist.

(c) Zeigen Sie, dass $N := \left\{ B \in \mathbb{R}^{2,2} \mid B^2 = 0 \right\}$ kein Teilraum von M ist.

(a) **(3 Punkte)**
$M \neq \emptyset$, da z.B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$, denn $0 - 0 = 0$.
Für $A_1 := \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$, $A_2 := \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M$ ist $a_1 - c_1 = 0$ und $a_2 - c_2 = 0$.
Dann gilt für $A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$:
$(a_1 + a_2) - (c_1 + c_2) = (a_1 - c_1) + (a_2 - c_2) \overset{\text{n.V.}}{=} 0 + 0 = 0$.

Also ist $A_1 + A_2 \in M$ und M abgeschlossen bzgl. Addition.
Für $A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M,\ \alpha \in \mathbb{R}$ ist $a - c = 0$.
Dann gilt für $\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$:
$\alpha a - \alpha c = \alpha(a - c) \overset{\text{n.V.}}{=} \alpha \cdot 0 = 0$.
Also ist $\alpha A \in M$ und M auch abgeschlossen bzgl. Skalarmultiplikation.
Da alle drei Teilraumkriterien erfüllt werden, ist M ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.

(b) **(3 Punkte)**
Wähle $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
$\mathcal{B} \subseteq M$, da $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M$ wegen $0 - 0 = 0$ und $A \in M$ wegen $1 - 1 = 0$.
Aus $\alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ folgt durch Komponentenvergleich das LGS $\alpha_3 = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_2 = 0$. Die drei Matrizen lassen sich nur trivial zur Nullmatrix linear kombinieren und sind somit linear unabhängig.
Da die drei Matrizen in $\mathcal{B}$ linear unabhängig sind und $\mathcal{B} \subseteq M$, ist $\mathcal{B}$ eine Basis des (nach Aufgabenstellung) dreidimensionalen Teilraums M.

(c) **(2 Punkte)**
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in N$, da $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Aber $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \notin M$, da $0 - 1 = -1 \neq 0$.
$N \not\subseteq M$ und somit kein Teilraum von M.

alternativ: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in N$, da $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in N$, da $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Aber $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \notin N$,da $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
N ist nicht abgeschlossen bzgl. Addition und somit kein Teilraum.

---

6. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt und die Matrixabbildung $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. P beschreibt die Spiegelung an der Geraden $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$.

(a) Ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von P? Falls ja, zu welchem Eigenwert gehört er?

(b) Gibt es einen zu $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ linear unabhängigen Eigenvektor von P? Falls ja, zu welchem Eigenwert gehört er?

(c) P ist diagonalisierbar.
Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2,2}$, sodass $P = S \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S^{-1}$ gilt.

(d) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = P\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(7) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) **(2 Punkte)**
Bei der Spiegelung im $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ werden alle Vektoren $\vec{v} \in \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ auf sich selbst abgebildet. Da der Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ im Spann von sich selbst liegt, gilt
$P \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1 von P.

(b) **(3 Punkte)**
Alle zu der Geraden $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ orthogonalen Vektoren werden durch P auf -1 mal sich selbst abgebildet.
$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist orthogonal zu $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, da $\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\text{std}} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0$.
Da beide Vektoren nicht der Nullvektor und orthogonal bzgl. des Standardskalarprodukts sind,

sind sie linear unabhängig und es gilt $P\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert -1 von P.

(c) **(2 Punkte)** In der Diagonalmatrix stehen die beiden Eigenwerte von P. In S stehen entsprechend den Diagonaleinträgen der Diagonalmatrix linear unabhängige Eigenvektoren. Mit den Resultaten aus a) und b) ist $S := \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) **(2 Punkte)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ist eine Linearkombination von Eigenvektoren von P, denn es gilt:
$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ mit $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ Eigenvektoren zum Eigenwert 1 bzw. -1 von P.
Somit ist
$\vec{y}(t) = e^{1(t-7)}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + e^{-1(t-7)}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{t-7}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + e^{-t+7}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t-7} - 2e^{-t+7} \\ 2e^{t-7} + e^{-t+7} \end{bmatrix}$