Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 13
G. Bärwolff, R. Nabben, R. Schneider 24.07.2013

Juli – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben sei die Matrix $A := \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$.

(a) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform von A.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von Kern(A).

(c) Bestimmen Sie eine Basis von Bild(A).

(d) Ist A injektiv/surjektiv/bijektiv?

(a) **(3 Punkte)**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & -6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-3\mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}+\mathrm{II}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\mathrm{III}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{NZSF}(A)$$

(b) **(2 Punkte)**

Ausgehend von der NZSF in a): Die Kopfvariablen sind x_1, x_3, x_5, die Nichtkopfvariablen x_2, x_4 parametrisieren die Lösungsmenge. Setze: $x_2 := s,\ x_4 := t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Kopfvariablen: $x_1 = 2s - t$, $x_3 = -3t$ und $x_5 = 0$. Somit ist eine Basis von Kern(A) gegeben durch:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Kern}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) **(2 Punkte)**

Eine Basis von Bild(A) wird durch die Spalten der Matrix A gebildet, bei denen in der NZSF ein Kopf steht. Nach a) sind dies die erste, dritte und fünfte Spalte von A. Somit ist $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von Bild(A).

(d) **(3 Punkte)**

Nach c) sind in einer Basis von Bild(A) drei Vektoren. Somit ist $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
Also ist A surjektiv .
Ebenfall nach c) ist $\dim(\mathrm{Kern}(A)) = 2 > 0$. Somit ist A nicht injektiv.
Da A nicht injektiv ist, ist A auch nicht bijektiv.

---

2. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B sowie die zugehörigen Eigenräume.

(b) Ist B diagonalisierbar?

(c) Ist B invertierbar?

(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t)$, $\vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) **(6 Punkte)** Da B eine obere Dreiecksmatrix ist, stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen. Es folgt, dass $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2/3} = 4$ die Eigenwerte von B sind.

Für den Eigenraum zum Eigenwert λ_1 gilt:

$$V_{\lambda_1} = \text{Kern}\{B\} = \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right\} \overset{\frac{1}{4}\text{I, III}-4\text{II}}{=} \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$. Für den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_{2/3}$ gilt:

$$V_{\lambda_{2/3}} = \text{Kern}\left\{B - \lambda_{2/3} \cdot I_3\right\} = \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \overset{\text{II+I}, \frac{1}{4}\text{I}}{=} \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

(b) **(2 Punkte)** B ist diagonalisierbar, falls für alle Eigenwerte die algVFH gleich der geomVFH ist. Nach a) ist die algVFH von $\lambda_{2/3}$ 2, die geomVFH von $\lambda_{2/3}$ ist jedoch nur 1, da der zugehörige Eigenraum eindimensional ist. B ist folglich nicht diagonalisierbar.

(c) **(1 Punkte)** B ist invertierbar, falls bijektiv. Ein Eigenwert von B ist 0. Der zugehörige Eigenraum ist gerade der Kern von B, denn $V_{\lambda_1=0} = \text{Kern}(B - 0 \cdot I_3) = \text{Kern}(B)$. Dieser ist nach a) eindimensional. Somit ist $\text{Kern}(B) \neq \left\{\vec{0}\right\}$ und B also nicht injektiv. Da B nicht injektiv, folglich auch nicht bijektiv ist, ist B nicht invertierbar.

(d) **(2 Punkte)** Lösung des AWPs mit der Eigenwertmethode. Wir stellen $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ als Linearkombination von Eigenvektoren dar: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Als Lösung des AWPs folgt: $y(t) = e^{0\cdot(t-2)}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{4\cdot(t-2)}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{4\cdot(t-2)}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2e^{4\cdot(t-2)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

---

3. Aufgabe

10 Punkte

Für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $C := \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & -\alpha \\ -2 & \alpha & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von C mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Spalten von C linear abhängig?

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist C invertierbar?

(d) Berechnen Sie für $\alpha = 3$ die Determinante von $2C$.

(a) **(4 Punkte)**

$$\det(C) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & -\alpha \\ -2 & \alpha & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}\right) = \underbrace{2\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 8 & -\alpha \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}\right)}_{\text{Entwicklung nach der ersten Spalte}}$$

$$= \underbrace{2 \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 8 & -\alpha \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\right) + 2 \cdot (-1) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right)}_{\text{Entwicklung nach der zweiten Zeile}} = 2(-8 + 4\alpha) + 0 = 8\alpha - 16.$$

(b) **(2 Punkte)** Die Spalten von C sind genau dann linear abhängig, wenn die Determinante von C 0 beträgt, also genau dann, wenn $\alpha = 2$.

(c) **(2 Punkte)** C ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante von 0 verschieden ist, also für alle $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 2$.

(d) **(2 Punkte)** Nach a) ist für $\alpha = 3$ ist $\det(C) = 8$. Somit ist $\det(2C) = 2^4\det(C) = 16 \cdot 8 = 128$.

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $V := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} | A \text{ obere Dreiecksmatrix}\}$ mit der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

und die lineare Abbildung

$$L : V \to V, \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -a & -2a \\ 0 & 2a - b + 2c \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

(b) Prüfen Sie, ob $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von L ist. Falls ja, zu welchem Eigenwert?

(c) Geben Sie die vollständige Abbildungsvorschrift der inversen Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}^{-1}$ an.

(a) **(6 Punkte)** spaltenweise Bestimmung von $L_{\mathcal{B}}$:

$$L_{\mathcal{B}}\vec{e}_1 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}}\left(2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\stackrel{lin.}{=} 2K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\mathcal{B}}\vec{e}_2 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}}\left(3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\stackrel{lin.}{=} 3K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) - 1K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\mathcal{B}}\vec{e}_3 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_3))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\stackrel{lin.}{=} K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) **(2 Punkte)**

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Also ist $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von L zum Eigenwert -1 .

(c) **(2 Punkte)**

$$K_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^3 \to V, \quad K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b - c & 2b \\ 0 & a + b + 2c \end{bmatrix}$$

---

5. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$F_1 : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x], \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto (a+b)x + (a+c)d \qquad , \qquad F_2 : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2a - c + d \\ c - d \end{bmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie, ob F_1 eine lineare Abbildung ist.

(b) Überprüfen Sie, ob F_2 eine lineare Abbildung ist.

(c) Bestimmen Sie $\text{Kern}(F_2)$ und dessen Dimension.

(d) Bestimmen Sie die Dimension von $\text{Bild}(F_2)$.

(a) **(2 Punkte)**

$$2 \cdot F_1\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \neq 4 = 2 \cdot 2 = F_1\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = F_1\left(2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

F_1 ist nicht homogen und somit auch nicht linear.

(b) **(3 Punkte)** F_2 ist linear, falls additiv und homogen. Für $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ muss also gelten: $F_2(A_1 + A_2) = F_2(A_1) + F_2(A_2)$ und $F_2(\alpha A_1) = \alpha F_2(A_1)$.
$F_2(A_1{+}A_2) = F_2\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) = F_2\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(a_1+a_2)-(c_1+c_2)+d_1+d_2 \\ (c_1+c_2)-(d_1+d_2) \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} (2a_1-c_1+d_1)+(2a_2-c_2+d_2) \\ (c_1-d_1)+(c_2-d_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1-c_1+d_1 \\ c_1-d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a_2-c_2+d_2 \\ c_2-d_2 \end{bmatrix} = F_2(A_1) + F_2(A_2)$
$F_2(\alpha A_1) = F_2\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) = F_2\left(\begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2\alpha a_1 - \alpha c_1 + \alpha d_1 \\ \alpha c_1 - \alpha d_1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2a_1-c_1+d_1 \\ c_1-d_1 \end{bmatrix} =$
$\alpha F_2(A_1)$
Also ist F_2 eine lineare Abbildung.

(c) **(4 Punkte)** $\mathrm{Kern}(F_2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}[x] \,\middle|\, F_2\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \vec{0} \right\}$
Aus $F_2\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a-c+d \\ c-d \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ergibt sich das LGS
$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{I+II}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\text{I}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$
Es folgt $a = 0$, $c = d$, b beliebig wählbar.
Somit ist $\mathrm{Kern}(F_2) = \left\{ b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \middle| b, c \in \mathbb{R} \right\}$.
Da $\mathrm{Kern}(F_2)$ von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird, beträgt die Dimension des Kerns 2.

(d) **(2 Punkte)** Nach c) ist $\mathrm{Kern}(F_2)$ zweidimensional. Nach dem Dimensionssatz gilt nun $\dim(\mathrm{Bild}(F_2)) = \dim(\mathbb{R}^{2,2}) - \dim(\mathrm{Kern}(F_2)) = 4 - 2 = 2$. Also ist die Dimension des Bildes gleich 2.

---

6. Aufgabe

8 Punkte

Gegegen sei $V = \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ mit der Basis $\mathcal{B} = \{4x+2, 5x-5\}$ und dem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \langle ax+b, cx+d \rangle_1 = \frac{1}{5}ac + \frac{1}{5}bd.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{ONB}$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \langle ax+b, cx+d \rangle_2 = 2ac - 3ad - 3bc + 2bd$$

kein Skalarprodukt auf V definiert.

(c) Durch $\mathcal{C} = \{\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3}\} := \left\{ \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts gegeben. Bestimmen Sie für $\vec{v} = -7\vec{e}_1$ den Koordinatenvektor $\vec{v}_{\mathcal{C}}$.

(a) **(4 Punkte)**
$q_1 = \frac{4x+2}{\|4x+2\|_1} = \frac{4x+2}{\sqrt{\frac{1}{5}4^2+\frac{1}{5}2^2}} = \frac{4x+2}{2} = 2x+1$
$l_2 = (5x-5) - \underbrace{\langle 5x-5, 2x+1 \rangle_1}_{\frac{1}{5}\cdot 5\cdot 2+\frac{1}{5}\cdot(-5)\cdot 1=1}(2x+1) = (5x-5) - (2x+1) = 3x-6$
$q_2 = \frac{3x-6}{\|3x-6\|_1} = \frac{3x-6}{\sqrt{\frac{1}{5}3^2+\frac{1}{5}(-6)^2}} = \frac{3x-6}{3} = x-2$
Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert somit $\mathcal{B}_{ONB} = \{q_1, q_2\} = \{2x+1, x-2\}$.

(b) **(2 Punkte)**
Die positive Definitheit ist verletzt, z.B. ist $\langle x+1, x+1 \rangle_2 = 2-3-3+2 = -2 < 0.$.

(c) **(2 Punkte)**
Bei einer ONB lassen sich die Koordinaten mit Hilfe der Skalarprodukte mit den Basisvektoren bestimmen.
$\vec{v}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \langle \vec{v}, \vec{c_1} \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{c_2} \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{c_3} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}.$