Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 13

G. Bärwolff, R. Nabben, R. Schneider 07.10.2013

Oktober – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & -6x_2 & -9x_3 & +33x_4 & = & 21 \\ & & 2x_3 & -6x_4 & = & -4 \\ x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +11x_4 & = & 7 \end{array}.$$

(a) Bestimmen Sie die zum gegebenen LGS zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$.

(b) Bestimmen sie die normierte Zeilenstufenform von $[A|\vec{b}]$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems.

(d) Bestimmen Sie die Lösung des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$.

(e) Bestimmen Sie eine Basis von Bild(A).

(f) Gibt es eine rechte Seite $\vec{v}$ so, dass $A\vec{x} = \vec{v}$ genau eine Lösung hat?.

(a) **(1 Punkt)** $[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & -6 & -9 & 33 & 21 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -3 & 11 & 7 \end{array}\right]$

(b) **(3 Punkte)**

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & -6 & -9 & 33 & 21 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -3 & 11 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -3 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & -4 \\ 3 & -6 & -9 & 33 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{III}-3\mathrm{I}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -3 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\mathrm{II}}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -3 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{I}+3\mathrm{II}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \mathrm{NZSF}([A|\vec{b}])$$

(c) **(2 Punkte)**
Ausgehend von der NZSF in a): Die Kopfvariablen sind x_1 und x_3, die Nichtkopfvariablen x_2, x_4 parametrisieren die Lösungsmenge. Setze: $x_2 := s,\ x_4 := t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Kopfvariablen: $x_1 = 1 + 2s - 2t$ und $x_3 = -2 + 3t$. Somit ist die Lösungsmenge gegeben durch:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) **(2 Punkte)**
Die Lösungsmenge setzt sich zusammen aus der speziellen Lösung + Lösung des homogenen Systems . Die Lösung des homogenen Systems ist somit

$$\mathbb{L}_{hom} = \left\{ s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(e) **(2 Punkte)**
Eine Basis von Bild(A) wird durch die Spalten der Matrix A gebildet, bei denen in der NZSF ein Kopf steht. Nach b) sind dies die erste und dritte Spalte von A. Somit ist $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von Bild(A).

(f) **(1 Punkt)**
Nein, denn Kern$(A) \neq \{\vec{0}\}$ und somit gilt: Falls $A\vec{x} = \vec{v}$ eine Lösung besitzt, dann gibt es schon unendlich viele Lösungen.

2. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 9 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p_B(\lambda)$ von B mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B und den Eigenraum zum betragsmäßig größten Eigenwert.

(c) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von B ist.

(d) Ist B diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie Matrizen S und D an, sodass $B = SDS^{-1}$.

(e) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t)$, $\vec{y}_0 = \vec{y}(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) **(2 Punkte)**

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -6 & 9 \\ 1 & -3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) = \underbrace{(-1-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -6 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right)}_{\text{Entwicklung nach dritter Zeile}}$$

$$= (-1-\lambda)((2-\lambda)(-3-\lambda)+6) = -\lambda(1+\lambda)^2 \ .$$

(b) **(3 Punkte)**

Die Eigenwerte sind $\lambda_{1/2} = -1$ und $\lambda_3 = 0$. Der betragsmäßig größte Eigenwert ist -1.

$$V_{-1} = \text{Kern}(B - (-1)I) = \text{Kern}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{I}-3\text{III},\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{=} \text{Kern}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \text{span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

(c) **(1 Punkt)**

$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 9 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Also ist $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert 0.

(d) **(4 Punkte)**

B ist diagonalisierbar, wenn für alle Eigenwerte algVFH = geomVFH gilt. Für $\lambda_3 = 0$ ist die algVFH = 1 und damit auch die geomVFH = 1 . Wie in b) gezeigt gilt für $\lambda_{1/2} = -1$ algVFH = geomVFH = 2. Damit ist B diagonalisierbar und nach b) und c) ist eine mögliche Wahl

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(e) **(2 Punkte)** Lösung des AWPs mit der Eigenwertmethode. Wir stellen $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ als Linearkombination von Eigenvektoren dar: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und damit auch Eigenvektor zum Eigenwert -1. Als Lösung des AWPs folgt: $y(t) = e^{-1\cdot(t-1)}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$F_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & a(x+b) \end{array} \qquad F_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & (2a+b)x - 2b \end{array} \qquad F_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \to & \mathbb{R}^{2,2} \\ ax+b & \mapsto & \begin{bmatrix} -b & a+b \\ a-b & 2a \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) Überprüfen Sie, ob F_1 eine lineare Abbildung ist.

(b) Überprüfen Sie, ob F_2 eine lineare Abbildung ist.

(c) Bestimmen Sie, falls möglich, die Abbildungsvorschrift von $F_2 \circ F_3$ bzw. $F_3 \circ F_2$.

(d) Bestimmen Sie die inverse Abildung von F_2.

(a) **(2 Punkte)**
$$2 \cdot F_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2(x+1) = 2x+2 \neq 2x+4 = 2(x+2) = F_1\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = F_1\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$
F_1 ist nicht homogen und somit auch nicht linear.

(b) **(3 Punkte)** F_2 ist linear, falls additiv und homogen. Für $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ muss also gelten: $F_2(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = F_2(\vec{v}_1) + F_2(\vec{v}_2)$ und $F_2(\alpha\vec{v}_1) = \alpha F_2(\vec{v}_1)$.
$$F_2(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = F_2\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = F_2\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \end{bmatrix}\right) = (2(a_1+a_2)+(b_1+b_2))x - 2(b_1+b_2)$$
$$= (2a_1+b_1)x + (2a_2+b_2)x - 2b_1 - 2b_2 = (2a_1+b_1)x - 2b_1 + (2a_2+b_2)x - 2b_2 = F_2(\vec{v}_1) + F_2(\vec{v}_2)$$
$$F_2(\alpha\vec{v}_1) = F_2\left(\alpha\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\right) = F_2\left(\begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha b_1 \end{bmatrix}\right) = (2(\alpha a_1)+(\alpha b_1))x - 2(\alpha b_1) = \alpha((2a_1+b_1)x - 2b_1) = \alpha F_2(\vec{v}_1).$$
Also ist F_2 eine lineare Abbildung.

(c) **(2 Punkte)** Die Verkettung $F_2 \circ F_3$ ist nicht definiert, da der Bildraum von F_3 nicht im Definitionsbereich von F_2 liegt . Für $F_3 \circ F_2$ gilt:
$$F_3 \circ F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2,2}, F_3 \circ F_2\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = F_3\left((2a+b)x - 2b\right) = \begin{bmatrix} 2b & 2a-b \\ 2a+3b & 4a+2b \end{bmatrix}.$$

(d) **(2 Punkte)** Es gilt: $F_2^{-1} : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2$ und $F_2\left(F_2^{-1}(ax+b)\right) = ax+b$. Wir setzen $F_2^{-1}(ax+b) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, dann muss gelten: $F_2\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = (2c+d)x - 2d = ax+b$. Es folgt $d = -\frac{b}{2}, c = \frac{a}{2} + \frac{b}{4}$, also $F_2^{-1}(ax+b) = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} + \frac{b}{4} \\ -\frac{b}{2} \end{bmatrix}$.

4. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $V := \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit der Basis $\mathcal{B} = \left\{x^2+1, 2x+2, x^2\right\}$. Die lineare Abbildung $L : V \to V$ sei gegeben durch die Bilder

$$L(x^2+1) = 12x+12, \quad L(2x+2) = 3x^2+1, \quad L(x^2) = 1.$$

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

(b) Welches Polynom $p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ besitzt den Koordinatenvektor $p_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$?

(c) Zeigen Sie, dass $p_{\mathcal{B}}$ ein Eigenvektor von $L_{\mathcal{B}}$ zum Eigenwert 3 ist.

(d) Berechnen Sie $L(p)$ für das Polynom aus Aufgabenteil b).

(a) **(6 Punkte)**

spaltenweise Bestimmung von $L_{\mathcal{B}}$:

$L_{\mathcal{B}}\vec{e}_1 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(x^2+1\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(12x+12\right) = K_{\mathcal{B}}\left(6(2x+2)\right)$

$\overset{lin.}{=} 6K_{\mathcal{B}}\left(2x+2\right) = 6\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

$L_{\mathcal{B}}\vec{e}_2 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(2x+2\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(3x^2+1\right) = K_{\mathcal{B}}\left(1(x^2+1)+2(x^2)\right)$

$\overset{lin.}{=} K_{\mathcal{B}}\left(x^2+1\right) + 2K_{\mathcal{B}}\left(x^2\right) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$L_{\mathcal{B}}\vec{e}_3 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_3))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(x^2\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(1\right) = K_{\mathcal{B}}\left((x^2+1)-(x^2)\right)$

$\overset{lin.}{=} K_{\mathcal{B}}\left(x^2+1\right) - K_{\mathcal{B}}\left(x^2\right) = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(b) **(2 Punkte)**

Für das gesuchte Polynom gilt: $p = K_{\mathcal{B}}^{-1}(p_{\mathcal{B}})$

$= K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = (x^2+1) + 2(2x+2) + x^2 = 2x^2+4x+5$.

(c) **(1 Punkt)**

$L_{\mathcal{B}}p_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Also ist $p_{\mathcal{B}}$ Eigenvektor von $L_{\mathcal{B}}$ zum Eigenwert 3.

(d) **(2 Punkte)**

Aus den vorigen Aufgabenteilen folgt: $L(p) = K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(L_{\mathcal{B}}\left(K_{\mathcal{B}}(p)\right)\right) = K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(L_{\mathcal{B}}p_{\mathcal{B}}\right) = K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(3p_{\mathcal{B}}\right) = 3K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(p_{\mathcal{B}}\right) = 3(2x^2+4x+5) = 6x^2+12x+15$.

5. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien die Mengen

$$T_1 = \left\{ C \in \mathbb{R}^{2,2} \middle| C \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad T_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \middle| a + 2b = 0 \text{ und } c + d = 0 \right\}.$$

(a) Prüfen Sie, ob T_1 ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.
(b) Prüfen Sie, ob T_2 ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.
(c) Ist $\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von T_2?

(a) **(1 Punkte)** Jeder Teilraum eines Vektorraums muss den Nullvektor enthalten. Dies ist hier nicht der Fall, da $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) **(3 Punkte)** Wir prüfen die Teilraumkriterien nach:
1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in T_2$, da $0 + 2 \cdot 0 = 0$ und $0 + 0 = 0$. T_2 ist nicht leer.
2. Seien $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in T_2$, dann ist $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in T_2$, da $(a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2) = (a_1 + 2b_1) + (a_2 + 2b_2) = 0 + 0 = 0$ und $(c_1 + c_2) + (d_1 + d_2) = (c_1 + d_1) + (c_2 + d_2) = 0 + 0 = 0$. Also ist T_2 abgeschlossen unter Addition.
3. Sei $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in T_2$ und sei $\alpha \in \mathbb{R}$ dann ist $\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} \in T_2$, da $(\alpha a) + 2(\alpha b) = \alpha(a + 2b) = \alpha \cdot 0 = 0$ und $\alpha c + \alpha d = \alpha(c + d) = \alpha \cdot 0 = 0$. Also ist T_2 abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren.
Alle Bedingungen sind erfüllt. T_2 ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.

(c) **(4 Punkte)** Wegen $2 + 2 \cdot (-1) = 0$ und $0 + 0 = 0$ bzw. $0 + 2 \cdot 0 = 0$ und $-1 + 1 = 0$ ist $\mathcal{M} \subset T_2$. Da die beiden Elemente von $\mathcal{M}$ keine Vielfachen voneinander sind, sind sie linear unabhängig. Sei nun $A \in T_2$, dann ist $a = -2b$ und $d = -c$. Also ist A von der Form $A = \begin{bmatrix} -2b & b \\ c & -c \end{bmatrix} = -b \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ und somit im Spann von $\mathcal{M}$. Also ist $\mathcal{M}$ eine Basis von T_2.

6. Aufgabe

9 Punkte

Gegegen seien $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von A bezüglich des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^3$.

(b) Berechnen Sie $\vec{v}^T A\vec{w}$ und $\vec{w}^T A\vec{v}$.

(c) Ist die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle_* : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\quad \langle\vec{x},\vec{y}\rangle_* = \vec{x}^T A\vec{y}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$?

(a) **(6 Punkte)**

$$q_1 = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right\|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}{6} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$l_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle}_{3\cdot\frac{1}{3}\cdot 1+3\cdot\frac{1}{3}\cdot 2+0\cdot\frac{1}{3}\cdot 2=3} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}{3} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$l_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle}_{-2\cdot\frac{1}{3}\cdot 1-7\cdot\frac{1}{3}\cdot 2+8\cdot\frac{1}{3}\cdot 2=0} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle}_{-2\cdot\frac{1}{3}\cdot 2-7\cdot\frac{1}{3}\cdot 1+8\cdot\frac{1}{3}\cdot(-2)=-9} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$q_3 = \frac{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}\right\|} = \frac{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}}{\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}} = \frac{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}}{6} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Somit erhalten wir $Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ und $R = Q^T A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

(b) **(2 Punkte)**

$$\vec{v}^T A\vec{w} = [-1\ 1\ 0] \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix} = 5 \text{ und } \vec{w}^T A\vec{v} = [0\ 1\ -1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = 3.$$

(c) **(1 Punkte)**

Die Abbildung ist nicht symmetrisch, da für die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ laut b) $\vec{v}^T A\vec{w} = 5 \neq 3 = \vec{w}^T A\vec{v}$ gilt, und damit kein Skalarprodukt.