Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
F. Lutz, R. Nabben, R. Schneider

SS 14
21.07.2014

Juli – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & -6 \\ -2 & 4 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$ und der Vektor $\vec{b} := \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[\,A \,|\, \vec{b}\,]$ in normierte Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

(d) Gibt es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, sodass das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{v}$ keine Lösung besitzt?

(a) **(3 Punkte)**

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & 0 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-3\text{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III}+2\text{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\text{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{I}-\text{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \mathrm{NZSF}([A|\vec{b}])$$

(b) **(3 Punkte)**
Ausgehend von der NZSF in a): Die Nichtkopfvariablen parametrisieren die Lösungsmenge. Setze: $x_2 := r,\ x_4 := s,\ x_5 := t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Kopfvariablen: $x_1 - 2r + s = 3 \Leftrightarrow x_1 = 3 + 2r - s$ und $x_3 - s - 2t = 0 \Leftrightarrow x_3 = s + 2t$. Somit ist die Lösungsmenge des LGS:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 3+2r-s \\ r \\ s+2t \\ s \\ t \end{bmatrix} \,\middle|\, r,s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, r,s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) **(2 Punkte)**
Eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$ wird durch die Spalten der Matrix A gebildet, bei denen in der NZSF ein Kopf steht. Nach a) sind dies die erste und die dritte Spalte von A. Somit ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

(d) **(2 Punkte)**
Nach c) sind in einer Basis von $\mathrm{Bild}(A)$ zwei Vektoren. Somit ist $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Also gibt es einen Vektor (sogar unendlich viele) $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, der nicht im Bild von A liegt, also so, dass das LGS $A\vec{x} = \vec{v}$ nicht lösbar ist.

---

2. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B.

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum zum kleinsten Eigenwert von B.

(c) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von B ist.

(d) Ist B diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $B = SDS^{-1}$ an.

(e) Ist B invertierbar?

(f) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t)$, $\vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) **(2 Punkte)**
B ist eine obere Dreiecksmatrix, also stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen: $\lambda_{1/2} = 2$ und $\lambda_3 = 3$.

(b) **(2 Punkte)** Für den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_{1/2}$ gilt:

$$V_{\lambda_{1/2}} = \text{Kern}\left\{B - \lambda_{1/2} \cdot I_3\right\} = \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \overset{\text{II}-\text{I}}{=} \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$
$$= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

(c) **(1 Punkte)**
$B\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Also ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert 3.

(d) **(4 Punkte)** B ist diagonalisierbar, falls die algVFH gleich der geomVFH für alle Eigenwerte ist. Nach a) bzw. b) ist $\lambda_{1/2}$ eine doppelte Nullstelle des char. Polynoms und die algVFH von $\lambda_{1/2}$ ist somit 2. Die geomVFH von $\lambda_{1/2}$ ist ebenfalls 2, da nach b) der zugehörige Eigenraum zweidimensional ist. Die algVFH von λ_3 ist nach a) gleich 1. Da die geomVFH eines Eigenwerts maximal so groß ist, wie die algVFH, aber mindestens 1, ist auch die geomVFH von λ_3 gleich 1. Also stimmt die algVFH mit der geomVFH für alle Eigenwerte überein und B ist folglich diagonalisierbar.
Eine Diagonalisierung von B ist: $B = SDS^{-1}$ mit $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(e) **(1 Punkte)** B ist invertierbar, falls bijektiv. Alle Eigenwerte von B sind verschieden von 0. Der Kern von B besteht daher nur aus dem Nullvektor und B ist injektiv. Aus dem Dimensionssatz folgt, dass B auch surjektiv und damit bijektiv, also invertierbar, ist.

(f) **(2 Punkte)** Lösung mit der Eigenvektormethode: $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist Linearkombination zweier Eigenvektoren. Daraus folgt:

$$y(t) = e^{\lambda_3(t-t_0)}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 4e^{\lambda_{1/2}(t-t_0)}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{3(t-2)}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 4e^{2(t-2)}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3(t-2)} - 4e^{2(t-2)} \\ e^{3(t-2)} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Aufgabe

9 Punkte

Für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 1 \\ \alpha & -4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -\alpha & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von C mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.
(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Spalten von C linear abhängig?
(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist C invertierbar?
(d) Berechnen Sie für $\alpha = 3$ die Determinante von $-2C$.

(a) **(4 Punkte)**

$$\det(C) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 1 \\ \alpha & -4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}\right) = \underbrace{(-1)\det\left(\begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 \\ \alpha & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)}_{\text{Entwicklung nach der ersten Zeile}}$$
$$= \underbrace{(-1)\cdot 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \alpha & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) + (-1)\cdot(-2)\cdot\det\left(\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)}_{\text{Entwicklung nach der dritten Spalte}} = -(\alpha-4) + 2(3-6) = -\alpha - 2.$$

(b) **(2 Punkte)**
Die Spalten von C sind genau dann linear abhängig, wenn die Determinante von C 0 beträgt, also genau dann, wenn $\alpha = -2$.

(c) **(1 Punkte)**
C ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante von 0 verschieden ist, also für alle $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -2$.

(d) **(2 Punkte)**
Nach a) ist für $\alpha = 3$ $\det(C) = -5$. Somit ist $\det(-2C) = (-2)^4 \det(C) = 16 \cdot (-5) = -80$.

---

4. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $V := \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit Basis $\mathcal{B} := \left\{x^2+1, x^2-x, x^2+2\right\}$ und die lineare Abbildung $L : V \to V$, von der folgendes bekannt sei:

$$L(x^2+1) = 2x+2, \quad L(x^2-x) = x^2+2, \quad L(x+2) = -x^2-2\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass x^2+2 im Kern von L liegt.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ von V.

(c) Ist L injektiv/surjekiv/bijektiv?

(a) **(2 Punkte)**
$L(x^2+2) = L\left((x^2-x)+(x+2)\right) = L(x^2-x) + L(x+2) = x^2+2-x^2-2 = 0$.
Also liegt x^2+2 in Kern(L).

(b) **(6 Punkte)**
Spaltenweise Bestimmung von $L_\mathcal{B}$:

$$L_\mathcal{B}\vec{e}_1 = K_\mathcal{B}(L(K_\mathcal{B}^{-1}(\vec{e}_1))) = K_\mathcal{B}\left(L(x^2+1)\right) = K_\mathcal{B}\,(2x+2) = K_\mathcal{B}\left(2(x^2+1)-2(x^2-x)\right)$$

$$\overset{lin.}{=} 2K_\mathcal{B}\left(x^2+1\right) - 2K_\mathcal{B}\left(x^2-x\right) = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_\mathcal{B}\vec{e}_2 = K_\mathcal{B}(L(K_\mathcal{B}^{-1}(\vec{e}_2))) = K_\mathcal{B}\left(L(x^2-x)\right) = K_\mathcal{B}\left(x^2+2\right) = \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L_\mathcal{B}\vec{e}_3 = K_\mathcal{B}(L(K_\mathcal{B}^{-1}(\vec{e}_3))) = K_\mathcal{B}\left(L(x^2+2)\right) \overset{a)}{=} K_\mathcal{B}\,(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Also ist $L_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) **(3 Punkte)**
Nach a) liegt x^2+2 im Kern von L, daher ist L nicht injektiv . Da der Kern von L mindestens Dimension 1 besitzt, kann das Bild von L nach dem Dimensionssatz höchstens zweidimensional sein. Der Bildraum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ist dreidimensional, also ist L auch nicht surjektiv . Da L nicht injektiv ist, ist L auch nicht bijektiv .

---

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$F_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\leq 2}[x] & \to & \mathbb{R}^2 \\ ax^2+bx+c & \mapsto & \begin{bmatrix} a+c \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad , \quad F_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} \end{array}$$

(a) Überprüfen Sie, ob F_1 eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie Kern(F_1) sowie eine Basis des Kerns und dessen Dimension.

(c) Überprüfen Sie, ob F_2 eine lineare Abbildung ist.

(a) **(3 Punkte)** Die Abbildung F_1 ist linear, falls sie additiv und homogen ist. Für beliebige Polynome $p := a_1x^2+b_1x+c_1$, $q := a_2x^2+b_2x+c_2 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ muss also gelten: $F_1(p+q) = F_1(p) + F_1(q)$ und $F_1(\alpha p) = \alpha F_1(p)$.

- $F_1(p+q) = F_1\left((a_1x^2+b_1x+c_1)+(a_2x^2+b_2x+c_2)\right)$
$= F_1\left((a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)\right)$
$= \begin{bmatrix} (a_1+a_2)+(c_1+c_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+c_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2+c_2 \\ 0 \end{bmatrix} = F_1(p) + F_1(q)$

- $F_1(\alpha p) = F_1(\alpha(a_1x^2 + b_1x + c_1)) = F_1(\alpha a_1x^2 + \alpha b_1x + \alpha c_1)$
 $= \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \alpha c_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_1 + c_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha F_1(p).$

Also ist F_1 eine lineare Abbildung.

(b) **(5 Punkte)** $\text{Kern}(F_1) = \left\{ ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \,\middle|\, F_1(ax^2 + bx + c) = \vec{0} \right\}$

Aus $F_1(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a + c \\ 0 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ergibt sich $a = -c$ und $b \in \mathbb{R}$ beliebig.
Somit ist $\text{Kern}(F_1) = \{-cx^2 + bx + c | b, c \in \mathbb{R}\} = \{c(-x^2 + 1) + bx | b, c \in \mathbb{R}\}$. Eine Basis des Kerns ist somit die Menge $\{-x^2 + 1, x\}$. Da die Basis zwei Elemente enthält, ist die Dimension des Kerns gleich 2.

(c) **(2 Punkte)** Wir zeigen, dass F_2 nicht homogen und damit nicht linear ist. Dazu wählen wir $z = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot i$ und $\alpha = i$. Dann ist $F_2(\alpha z) = F_2(i) = -i \neq i = i \cdot 1 = iF_2(1) = \alpha F_2(z)$.

---

6. Aufgabe

8 Punkte

(a) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix $M = [\vec{m}_1\ \vec{m}_2\ \vec{m}_3] := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(b) Sei $P \in \mathbb{R}^{3,3}$ eine orthogonale Matrix und $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ der Vektor mit $P\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie die Länge des Vektors $\vec{w}$ bezüglich der vom Standardskalarprodukt induzierten Norm.

(a) **(6 Punkte)** Wir bestimmen die Spalten der Matrix Q:

$$q_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle}_{5} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$q_2 = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$l_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle}_{0} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}) - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle}_{-5} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$q_3 = \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Damit erhalten wir $Q = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ und $R = Q^T M = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) **(2 Punkte)**
Da orthogonale Abbildungen längentreu sind, gilt $\|\vec{w}\| = \|P\vec{w}\|$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle} = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7.$$