Technische Universität Berlin **SS 2015**
Fakultät II – Institut für Mathematik **6. Oktober 2015**
Doz.: F. Lutz, M. H. Farshbaf Shaker, A. Miedlar
Ass.: D. Beßlich, T. Scherfner, P. Winkert

Modulprüfung
„Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vornamen: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden! Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte!

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 22 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. **Aufgabe** **(7 Punkte)**

Gegeben sei die invertierbare Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -6 & 12 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse Matrix A^{-1} mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von Bild(A) und geben Sie Kern(A) an.

(c) Ist $\det(A \cdot A^T) = 0$? Wenn nein, geben Sie $\det(A \cdot A^T)$ an.

Lösung:

(a) [3 Punkte]
Es gilt

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}+6\cdot\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{I}+2\cdot\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right] = [I|A^{-1}].$$

(b) [1.5 Punkte]
Da A invertierbar ist , gilt Bild$(A) = \mathbb{R}^3$. Eine mögliche Basis wäre die Standardbasis, d.h.

$$\text{Basis}(\text{Bild}(A)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Weiter folgt aus der Invertierbarkeit, dass A injektiv und somit Kern$(A) = \{\vec{0}\}$ ist .

(c) [2.5 Punkte]
Da A invertierbar ist, gilt $\det(A) \neq 0$ und es gilt immer $\det(A^T) = \det(A) \neq 0$. Weiter folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz, dass $\det(A \cdot A^T) = \det(A)\det(A^T) \neq 0$ ist. Nun gilt mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz, dass

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -6 & 12 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der 3. Spalte}}}{=} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (-1) \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2)) = -1.$$

Also erhält man $\det(A \cdot A^T) = \det(A)\det(A^T) = 1$.

2. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B sowie die zugehörigen Eigenräume.

(b) Existiert eine Basis aus Eigenvektoren des $\mathbb{R}^3$? Wenn ja, geben Sie eine solche an.

(c) Ist B diagonalisierbar? Wenn ja, geben Sie D und S der Diagonalisierung

$$B = S \cdot D \cdot S^{-1}$$

an. Hierbei muss die Matrix S^{-1} weder berechnet noch angegeben werden!

(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t), \quad \vec{y}_0 = \vec{y}(3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) [4 Punkte]
Da B eine untere Dreiecksmatrix ist, stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen. Also sind die Eigenwerte $1, 2$ und 3.
Für die Eigenräume erhalten wir

$$\begin{aligned}
V_{\lambda_1=1} &= \mathrm{Kern}(B - I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \\
V_{\lambda_2=2} &= \mathrm{Kern}(B - 2\cdot I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \\
V_{\lambda_3=3} &= \mathrm{Kern}(B - 3\cdot I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

(b) [1 Punkt]
Ja, da die geometrische Vielfachheit jedes Eigenvektors gleich eins und somit gleich der algebraischen Vielfachheit ist. Eine mögliche Basis wäre

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

(c) [2 Punkte]
Ja, da die geometrische Vielfachheit jedes Eigenvektors gleich eins und somit gleich der algebraischen Vielfachheit ist. Die Matrix D ist eine Diagonalmatrix auf deren Diagonale die Eigenwerte von B stehen, d.h.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix S hat in der i-ten Spalte einen Eigenvektoren des Eigenwerts aus der i-ten Spalte von D stehen, d.h.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) [2 Punkte]

Wir stellen den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von Eigenvektoren von B dar:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= 3 \cdot e^{1\cdot(t-3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot e^{2\cdot(t-3)} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot e^{3\cdot(t-3)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3e^{t-3} \\ -3e^{2\cdot(t-3)} \\ 3 \cdot e^{2\cdot(t-3)} + e^{3\cdot(t-3)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Aufgabe **(7 Punkte)**

Gegeben seien die linearen Abbildungen

$$F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]; \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto (c-b)x^2 + (b-a)x + (a-c),$$

$$F_2 : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^3; \quad ax^2 + bx + c \mapsto \begin{pmatrix} a \\ 2b + a \\ 3c + 2b + a \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die vollständige Abbildungsvorschrift von $F_1 \circ F_2$.

(b) Bestimmen Sie Kern(F_1) und geben Sie eine Basis von Kern(F_1) an.

(c) Bestimmen Sie dim(Kern(F_1)) und dim(Bild(F_1)).

(d) Ist F_1 injektiv/surjektiv/bijektiv?

(e) Ist F_1 invertierbar? Wenn ja, bestimmen Sie F_1^{-1}.

Lösung:

(a) [2 Punkte]

Es gilt

$$\begin{aligned} &F_1 \circ F_2 : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]; \\ &\quad ax^2 + bx + c \mapsto F_1\left(F_2(ax^2 + bx + c)\right) = F_1\left(\begin{pmatrix} a \\ 2b + a \\ 3c + 2b + a \end{pmatrix}\right) \\ &\quad = 3cx^2 + 2bx - (3c + 2b). \end{aligned}$$

(b) [1.5 Punkte]
Wir bestimmen zunächst $\operatorname{Kern}(F_1)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Kern}(F_1) &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (c-b)x^2 + (b-a)x + (a-c) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, c = b,\ b = a,\ a = c \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Somit ist eine Basis gegeben als

$$\operatorname{Basis}(\operatorname{Kern}(F_1)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) [1 Punkt]
Aus (b) erhalten wir $\dim(\operatorname{Kern}(F_1)) = 1$ und mit Hilfe der Dimensionsformel ergibt sich

$$\dim \operatorname{Bild}(F_1) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{Kern}(F_1)) = 3 - 1 = 2.$$

(d) [1.5 Punkte]
Aus (c) erhalten wir $\operatorname{Kern}(F_1) \neq \{\vec{0}\}$, d.h. F_1 ist nicht injektiv. Weiter folgt mit $\dim(\operatorname{Bild}(F_1)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x])$, dass F_1 nicht surjektiv ist. Insgesamt kann F_1 nicht bijektiv sein, da weder injektiv noch surjektiv.

(e) [1 Punkt]
Aus (d) erhalten wir, dass F_1 nicht bijektiv und somit auch nicht invertierbar ist.

4. **Aufgabe** **(7 Punkte)**

Gegeben sei $V := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,2} \,\middle|\, A = A^T \right\}$ mit der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und die lineare Abbildung

$$L : V \to V; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

(b) Geben Sie die komplette Abbildungsvorschrift der inversen Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}^{-1}$ an.

Lösung:

(a) [5 Punkte]
Anhand des folgenden Diagramms

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] & V \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[u, "K_{\mathcal{B}}^{-1}"] \arrow[r, "L_{\mathcal{B}}"'] \arrow[r, bend left=90, dashed] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

erhält man die Formel

$$L_{\mathcal{B}} = K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Wir bestimmen $L_{\mathcal{B}}$ spaltenweise:

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1) &= K_{\mathcal{B}}\left(L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1)\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\vec{b}_1\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\vec{b}_1\right) = \vec{e}_1,\\
L_{\mathcal{B}}(\vec{e}_2) &= K_{\mathcal{B}}\left(L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2)\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\vec{b}_2\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\vec{b}_2\right) = \vec{e}_2,\\
L_{\mathcal{B}}(\vec{e}_3) &= K_{\mathcal{B}}\left(L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_3)\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\vec{b}_3\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\\
&= K_{\mathcal{B}}\left(3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\\
&= 3K_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + K_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) - K_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) [2 Punkte]
Es ist

$$\begin{aligned}
&K_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^3 \to V,\\
&\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+2c & b \\ b & b+c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ und

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{b}_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist.

(b) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie die vollständige Abbildungsvorschrift der Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}$.

Lösung:

(a) [4 Punkte]
Es gilt zunächst

$$\|\vec{b_1}\| = \sqrt{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1\rangle} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = 1,$$
$$\|\vec{b_2}\| = \sqrt{\langle \vec{b}_2, \vec{b}_2\rangle} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = 1,$$
$$\|\vec{b_3}\| = \sqrt{\langle \vec{b}_3, \vec{b}_3\rangle} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1.$$

Weiter erhält man

$$\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 = 0,$$
$$\langle \vec{b}_1, \vec{b}_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0,$$
$$\langle \vec{b}_2, \vec{b}_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ symmetrisch ist folgt insgesamt $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j\rangle = 0$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$. Da $\mathcal{B}$ nach Voraussetzung eine Basis ist, ist damit gezeigt, dass es eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) [2 Punkte]
Da die Spalten der Matrix A nach Aufgabenteil (a) bereits eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden, gilt $A = Q$. Also ist R in der QR-Zerlegung gegeben als

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) [2 Punkte]
Da wir aus (a) wissen, dass $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis ist, gilt

$$K_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$\vec{v} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \langle \vec{v}, \vec{b}_1\rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{b}_2\rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{b}_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{\sqrt{2}} \\ \frac{a-b}{\sqrt{2}} \\ c \end{pmatrix}.$$

6. **Aufgabe** **(7 Punkte)**

Gegeben seien die Mengen

$$T_1 := \left\{ C \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; C = C^T \right\}, \quad T_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$T_3 := \left\{ ax^2 + b \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \;\middle|\; b = 1 \right\}.$$

(a) Überprüfen Sie, ob T_1 ein Teilraum von $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

(b) Überprüfen Sie, ob T_2 ein Teilraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

(c) Überprüfen Sie, ob T_3 ein Teilraum von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ ist.

Hinweis: Die Menge $\mathbb{Z}$ ist gleich der Menge der ganzen Zahlen.

Lösung:

(a) [4 Punkte] Wir überprüfen die Teilraumeigenschaften.

- Da
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in T_1,$$
ist T_1 nicht leer.
- Seien $A, B \in V$. Dann gilt
$$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B,$$
d.h. T_1 ist abgeschlossen bezüglich Addition.
Alternativrechnung: Seien $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in T_1$. Dann gilt
$$(A+B)^T = \left(\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_2+b_2 & a_3+b_3 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_2+b_2 & a_3+b_3 \end{pmatrix} = A + B.$$
- Seien $A \in T_1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$$
d.h. T_1 ist abgeschlossen bezüglich skalarer Multiplikation.
Alternativrechnung: Seien $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \in T_1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$$(\alpha A)^T = \left(\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_2 & a_3 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_2 & \alpha a_3 \end{pmatrix} = \alpha A.$$

Da T_1 alle Eigenschaften erfüllt, ist T_1 ein Teilraum von $\mathbb{R}^{2,2}$.

(b) [1.5 Punkte]
Es gilt für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in T_2$ und $\alpha = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, dass
$$\alpha \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \notin T_2.$$
Also ist T_2 nicht homogen und somit kein Teilraum von $\mathbb{R}^2$.

(c) [1.5 Punkte]
Da $\vec{0} = 0x + 0 \notin T_3$, ist das notwendige Kriterium eines Teilraumes nicht erfüllt. Deswegen ist T_3 kein Teilraum von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$.
Alternativ: Sei $\alpha = 2$ und $p(x) := 0x + 1 \in T_3$. Dann gilt $2 \cdot p(x) = 0x + 2 \notin T_3$. Somit ist T_3 weder homogen noch additiv, also kein Teilraum von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$.