Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: M. Hammer, F. Lutz, R. Nabben, P. Winkert
Ass.: D. Beßlich, P. Winkert

WS 2015/2016
17. Februar 2016

Modulprüfung „Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vornam e: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden! Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte!

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 22 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. **Aufgabe** **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix A

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 16 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}.$$

(a) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform von A.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

(d) Ist A injektiv/surjektiv/bijektiv?

Lösung:

(a) [3 Punkte]

Es gilt

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & 16 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{NZSF}(A).$$

(b) [2 Punkte]

Aus (a): Wir stellen die Kopfvariablen mittels der Nichtkopfvariablen dar. Setze $x_3 := r$, $x_4 := s$, $x_5 := t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Kopfvariablen

$$x_1 = -2r - 3t, \quad x_2 = 4s.$$

Somit erhalten wir eine Basis durch

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Kern}(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) [1 Punkt]

Aus (b) folgt: Da die Kopfvariablen x_1, x_2 sind, erhalten wir die gesuchte Basis als die Spalten 1 und 2 der ursprünglichen Matrix A, d.h.

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Bild}(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) [2 Punkte]

Da $\mathrm{Kern}(A) \neq \{\vec{0}\}$ folgt direkt, dass A nicht injektiv ist. Der Bildraum der Matrixabbildung A ist $\mathbb{R}^3$ und aus $\dim \mathrm{Bild}(A) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ folgt somit, dass A nicht surjektiv ist. Da A weder injektiv noch surjektiv ist, ist A auch nicht bijektiv.

2. **Aufgabe** **(7 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B sowie die zugehörigen Eigenräume.

(b) Ist B diagonalisierbar?

(c) Ist B invertierbar?

(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t), \quad \vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) [3 Punkte]

Da B eine obere Dreiecksmatrix ist, stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen. Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2,3} = 5$.

Für $\lambda_1 = 0$ gilt

$$V_{\lambda_1=0} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für $\lambda_{2,3} = 5$ gilt

$$\begin{aligned} V_{\lambda_{2,3}=5} &= \text{Kern}(B - 5I) \\ &= \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

(b) [1 Punkte]

Nein, da die geometrische Vielfachheit von 5 nicht gleich seiner algebraischen Vielfachheit ist.

(c) [1 Punkt]

Nein, da Null ein Eigenwert von B ist und somit B nicht injektiv also auch nicht bijektiv ist.

(d) [2 Punkte]

Wir stellen den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von Eigenvektoren von B dar:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\vec{y}(t) = -10 \cdot e^{0\cdot(t-2)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{5\cdot(t-2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + e^{5\cdot(t-2)} \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe **(7 Punkte)**

Für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$C_\alpha := \begin{pmatrix} 0 & 3 & \alpha & 5 \\ 2 & \alpha & 2\alpha & 3\alpha \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von C_α ausschließlich mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Spalten linear abhängig?

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist C_α invertierbar?

(d) Berechnen Sie für $\alpha = 0$ die Determinante von $2C_\alpha \cdot C_\alpha^T$.

Lösung:

(a) [3 Punkte]
Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\det C_\alpha &:= \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & \alpha & 5 \\ 2 & \alpha & 2\alpha & 3\alpha \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & \alpha & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Laplace 1. Spalte)} \\
&= (-2) \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Laplace 2. Zeile)} \\
&= -2(\alpha+5) - 2(-3-3\alpha) = 4\alpha - 4 = 4(\alpha - 1).
\end{aligned}$$

(b) [1 Punkt]
Die Spalten sind linear abhängig, falls die Determinante gleich Null ist, d.h. für $\alpha = 1$.

(c) [1 Punkt]
Die Matrix ist invertierbar, falls die Determinante ungleich Null ist, d.h. für $\alpha \neq 1$.

(d) [2 Punkte]
Nach (a) gilt $\det(C_0) = -4$. Weiter gilt $\det(C_0^T) = \det(C_0)$ und mit Hilfe des Determinantenmultiplikationssatzes folgt insgesamt

$$\det(2C_0C_0^T) = 2^4 \det(C_0)\det(C_0) = 2^4(-4)(-4) = 2^8 = 256.$$

4. Aufgabe **(8 Punkte)**

Gegeben seien der Vektorraum

$$V := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; A \text{ obere Dreiecksmatrix} \right\}$$

mit der Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und die lineare Abbildung

$$L : V \to V, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c-b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Prüfen Sie, ob $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von L ist. Falls ja, zu welchem Eigenwert?

(b) Geben Sie die vollständige Abbildungsvorschrift der inversen Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}^{-1}$ an.

(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

Lösung:

(a) [2 Punkte]
Es gilt

$$L\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ja, der Vektor ist ein Eigenvektor von L und zwar zum Eigenwert -1.

(b) [2 Punkte]
Es ist

$$K_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^3 \to V,$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \mapsto \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 - \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

(c) [4 Punkte]
Anhand des folgenden Diagramms

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] & V \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[u, "K_{\mathcal{B}}^{-1}"] \arrow[r, "L_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, dashed, bend left=90] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

erhält man die Formel

$$L_{\mathcal{B}} = K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Wir bestimmen $L_{\mathcal{B}}$ spaltenweise:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1) &= K_{\mathcal{B}}\left(L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1)\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\vec{b}_1\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\vec{b}_2\right) = \vec{e}_2, \\ L_{\mathcal{B}}(\vec{e}_2) &= K_{\mathcal{B}}\left(L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2)\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\vec{b}_2\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\vec{b}_1\right) = \vec{e}_1, \\ L_{\mathcal{B}}(\vec{e}_3) &= K_{\mathcal{B}}\left(L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_3)\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\vec{b}_3\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\vec{0}\right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Also ist

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. **Aufgabe** **(7 Punkte)**

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$F_1 : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x], \qquad F_2 : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a+b)x + (a+c)d + 1, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c \\ b \\ d \end{pmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie, ob F_1 eine lineare Abbildung ist.

(b) Überprüfen Sie, ob F_2 eine lineare Abbildung ist.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(F_2)$ und dessen Dimension.

(d) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Bild}(F_2)$.

Lösung:

(a) [1 Punkt]
Da $F_1(\vec{0}) = 1$ ist, ist die notwendige Bedingung einer linearen Abbildung nicht erfüllt und F_1 somit nicht linear.

(b) [3 Punkte]
Die Abbildung F_2 ist linear, falls Sie additiv und homogen ist. Seien $A := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$F_2\left(A + B\right) = \begin{pmatrix} a_3 + b_3 \\ a_2 + b_2 \\ a_4 + b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_4 \end{pmatrix} = F_2(A) + F_2(B)$$

und

$$F_2\left(\alpha A\right) = \begin{pmatrix} \alpha a_3 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = \alpha F_2(A).$$

Also ist F_2 eine lineare Abbildung.

(c) [2 Punkte]
Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(F_2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; F_2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \vec{0} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} c \\ b \\ d \end{pmatrix} = \vec{0} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man, dass die Dimension des Kerns 1 ist.

(d) [1 Punkt] Aus dem Dimensionssatz erhält man

$$\dim \mathrm{Bild}\, F_2 = \dim \mathbb{R}^{2,2} - \dim \mathrm{Kern}\, F_2 = 4 - 1 = 3.$$

6. **Aufgabe** **(8 Punkte)**

Gegeben sei $V := \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ mit der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \vec{b_1} := 2x + 2, \vec{b_2} := 1 \right\}$ und dem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \langle ax + b, cx + d \rangle_1 = \frac{1}{4}ac + \frac{1}{4}bd.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \langle ax + b, cx + d \rangle_2 = ac + ad + bc - bd$$

kein Skalarprodukt auf V definiert.

(b) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$.

(c) Durch $\mathcal{C} := \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\} := \left\{\sqrt{2}(x + 1), \sqrt{2}(-x + 1)\right\}$ ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ gegeben. Bestimmen Sie für $\vec{v} := 8x$ den Koordinatenvektor $\vec{v}_{\mathcal{C}}$.

Lösung:

(a) [2 Punkte]
Für den Vektor $\vec{p} = 1$ erhalten wir $\langle 1, 1\rangle_2 = -1 < 0$. Somit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ nicht positiv definit und ist deswegen kein Skalarprodukt.

(b) [4 Punkte]
Wir verwenden das Verfahren von Gram-Schmidt. Zunächst normieren wir den Vektor $2x + 2$:

$$\vec{q}_1 := \frac{2x+2}{\|2x+2\|_1} = \frac{2x+2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(x+1).$$

Nun ist das Lot gegeben als

$$\vec{l}_2 = \vec{b}_2 - \langle \vec{b}_2, \vec{q}_1\rangle_1 \, \vec{q}_1 = 1 - \langle 1, \sqrt{2}(x+1)\rangle_1 \sqrt{2}(x+1) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{2}(x+1) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

und somit ist der zweite gesuchte Vektor

$$\vec{q}_2 = \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{\|-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\|_1} = \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{2}{16}}} = \frac{-2x+2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(-x+1).$$

Insgesamt erhalten wir als Orthonormalbasis

$$\mathcal{B}_{\text{ONB}} = \left\{ \sqrt{2}(x+1), \sqrt{2}(-x+1) \right\}.$$

(c) [2 Punkte]
Da wir eine Orthonormalbasis gegeben haben gilt

$$K_{\mathcal{C}}(8x) = \begin{pmatrix} \langle 8x, \sqrt{2}(x+1)\rangle_1 \\ \langle 8x, \sqrt{2}(-x+1)\rangle_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Die Koordinatenabbildung ist gegeben als

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{C}} : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] &\to \mathbb{R}^2 \\ ax + b &\mapsto \begin{pmatrix} \langle ax+b, \sqrt{2}(x+1)\rangle_1 \\ \langle ax+b, \sqrt{2}(-x+1)\rangle_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b+a}{2\sqrt{2}} \\ \frac{b-a}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$