Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: F. Lutz, R. Nabben, M. Rafler, P. Winkert
Ass.: D. Beßlich, M. Voß, J. Zur

Wintersemester 2016/2017
10. April 2017

Modulprüfung
„Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen DIN-A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in Reinschrift auf DIN-A4-Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden! Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte!

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 22 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. **Aufgabe** **7 Punkte**

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,5}, \qquad \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ in normierte Zeilenstufenform.

(b) Geben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ explizit an.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

(d) Ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{c}$ für alle Vektoren $\vec{c} \in \mathbb{R}^4$ lösbar?

2. **Aufgabe** **7 Punkte**

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{3,3}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$ und zugehörigen Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ an.

(b) Geben Sie das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ von A an.

(c) Ist die Matrix A invertierbar?

(d) Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathbb{C}^{3,3}$, sodass gilt:

$$A = S \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}.$$

3. **Aufgabe** **8 Punkte**

Gegeben seien

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} 2a & -b \\ -b & 2a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad M := \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass T ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine Teilmenge von M, die eine Basis von T ist. Weisen Sie nach, dass das von Ihnen gewählte M eine Basis von T ist.

(c) Bestimmen Sie die Dimension von T.

4. **Aufgabe** **8 Punkte**

Gegeben seien der Vektorraum der reellen symmetrischen 2×2-Matrizen

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

mit einer Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ B_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Weiter sei eine lineare Abbildung

$$L : V \to V, \quad \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & a+b \\ a+b & c \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bezüglich $\mathcal{B}$.

(b) Bestimmen Sie den Kern von $L_{\mathcal{B}}$ und den Kern von L.

(c) Überprüfen Sie L auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

5. **Aufgabe** **7 Punkte**

Für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 0 & 3 & \alpha & -1 \\ -1 & 8 & -9 & -5\alpha \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie $\det(A_\alpha)$ mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass die Spalten von A_α linear unabhängig sind.

(c) Geben Sie die Determinante von $2{A_{-2}}^T$ an.

6. **Aufgabe** **8 Punkte**

Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, ausgestattet mit dem folgenden Skalarprodukt

$$\begin{aligned} &\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \times \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}, \\ &\left\langle a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \ , \ a_2 x^2 + b_2 x + c_2 \right\rangle = 2a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2. \end{aligned}$$

Weiter ist durch

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := x^2 + x + 1, \quad \vec{b}_2 := -x + 1, \quad \vec{b}_3 := 2 \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens aus $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\text{ONB}}$ von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von 1 bezüglich $\mathcal{B}_{\text{ONB}}$.

Gesamtpunktzahl: 45 Punkte