1. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie A^{-1}.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(A)$ und $\dim(\mathrm{Bild}(A))$.

(d) Liegt der Vektor $\vec{b}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ im Kern von A?

Lösung:

(a) [4 Punkte]
Wir betrachten die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|I_3]$ und formen um

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\text{III}-2\cdot\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\text{I}-5\cdot\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Die Inverse von A ist durch $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

(b) [2 Punkte]
Die einzige Lösung $\vec{x}$ des Systems $A\vec{x} = \vec{b}$ ist gegeben durch

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten als Lösungsmenge $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) [2 Punkte]
Da A bijektiv und damit insbesondere injektiv ist, gilt $\mathrm{Kern}(A) = \{\vec{0}\}$. Da A insbesondere auch surjektiv ist, gilt $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

(d) [1 Punkt]
Nein, da A invertierbar ist und somit $\mathrm{Kern}(A) = \{\vec{0}\}$ gilt.

2. **Aufgabe** **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von B.

(b) Ist B diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t), \qquad \vec{y}_0 = \vec{y}(-3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) [4 Punkte]
Da B eine obere Dreiecksmatrix ist, stehen die Eigenwerte auf der Hauptdiagonalen:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 4.$$

Für die Eigenräume von λ_1, λ_2 und λ_3 gilt:

$$V_{\lambda_1=3} = \mathrm{Kern}(B - 3 \cdot I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$V_{\lambda_2=0} = \mathrm{Kern}(B - 0 \cdot I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$V_{\lambda_3=4} = \mathrm{Kern}(B - 4 \cdot I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}.$$

(b) [2 Punkte]
Da die geometrische und die algebraische Vielfachheit für jeden Eigenwert jeweils eins ist , ist B diagonalisierbar.

(c) [2 Punkte]
Der gegebene Vektor kann als Linearkombination von Eigenvektoren geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$y(t) = e^{B(t+3)}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e^{3(t+3)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot e^{0 \cdot (t+3)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. **Aufgabe** **(6 Punkte)**

Für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$C_\alpha := \begin{pmatrix} -2 & \alpha & 0 & 3 \\ 4\alpha & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von C_α mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz (angewandt auf 4×4- und 3×3-Matrizen).

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat C_α den Eigenwert 0?

(c) Berechnen Sie die Determinante von $(C_{-1})^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) C_9^T$.

Lösung:

(a) [3 Punkte]

Wir berechnen die Determinante von C_α mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz:

$$\begin{aligned} \det(C_\alpha) &\overset{3.\,\underline{Spalte}}{=} (-1) \cdot (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & \alpha & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\overset{2.\,\underline{Zeile}}{=} 3 \cdot \left(1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & \alpha \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right) \\ &= 3 \cdot ((2-6) - (4-2\alpha) = 6\alpha - 24. \end{aligned}$$

(b) [1 Punkt]

Die Matrix C_α hat den Eigenwert 0 genau dann, wenn $\det(C_\alpha) = 0$ und dies gilt genau dann, wenn $\alpha = 4$.

(c) [2 Punkte]

Es gilt

$$\det\left((C_{-1})^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) C_9^T \right) = (\det(C_{-1})^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \det(C_9) = -\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{16} \cdot 30 = -\frac{1}{16}.$$

4. **Aufgabe** **(7 Punkte)**

Welche der folgenden Mengen sind Teilräume? Beweisen oder widerlegen Sie Ihre Aussagen.

(a) $S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \leq x_2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(b) $S_2 := \left\{ B \in \mathbb{R}^{3,3} \;\middle|\; B \text{ besitzt genau drei paarweise verschiedene Eigenwerte} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{3,3}$

(c) $S_3 := \left\{ ax + b \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \;\middle|\; a + b = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$

Lösung:

(a) [2 Punkte]

S_1 ist kein Teilraum, denn es gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1$ aber $(-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \notin S_1$. Damit ist S_1 nicht abgeschlossen bzgl. der Skalarmultiplikation, also auch kein Teilraum des $\mathbb{R}^2$.

(b) [2 Punkte]

Die Nullmatrix ist nicht in S_2 , also ist S_2 kein Teilraum.

(c) [3 Punkte]

S_3 ist ein Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$, denn:

(i) S_3 ist nicht leer, da offenbar $\vec{0} \in S_3$.

(ii) Für $\vec{p} = ax + b \in S_3$ und $\vec{q} = cx + d \in S_3$ gilt $\vec{p} + \vec{q} = (a + c)x + (b + d)$ wobei

$$(a + c) + (b + d) = (a + b) + (c + d) = 0$$

gilt. Somit gilt $\vec{p} + \vec{q} \in S_3$. Damit ist S_3 abgeschlossen bzgl. der Addition.

(iii) Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{p} = ax + b \in S_3$. Dann folgt

$$\lambda \cdot \vec{p} = \lambda \cdot (ax + b) = (\lambda a)x + \lambda b$$

wobei $\lambda a + \lambda b = \lambda(a + b) = 0$ gilt. Somit ist $\lambda \cdot \vec{p} \in S_3$. Damit ist S_3 abgeschlossen bzgl. der Skalarmultiplikation.

5. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

Gegeben sei der Vektorraum $V := \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ mit der Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \vec{b}_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; \vec{b}_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

und die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} L \colon V &\longrightarrow V \\ \begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} 2(a+b) & 2(a+b) \\ 3c & c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie $\dim(\text{Bild}(L))$ an.

(b) Berechnen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

(c) Gegeben sei nun eine zweite Basis

$$\mathcal{B}' := \left\{ \vec{b}_1' := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \vec{b}_2' := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; \vec{b}_3' := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

von V. Berechnen Sie die Transformationsmatrix $S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.

(d) Gilt $\det(L) = 0$?

Lösung:

(a) [2 Punkte]
Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Bild}(L) &= \left\{ \begin{bmatrix} 2(a+b) & 2(a+b) \\ 3c & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2w & 2w \\ 3c & c \end{bmatrix} \mid c, w \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Da die beiden Matrizen linear unabhängig sind, folgt dim(Bild(L))=2.

(b) [3 Punkte]
Wir bestimmen $L_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{3,3}$ spaltenweise:

$$L_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1)\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\vec{b}_1\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}}(2\vec{b}_1) = 2\vec{e}_1$$

$$L_{\mathcal{B}}(\vec{e}_2) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2)\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\vec{b}_2\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}}(2\vec{b}_1) = 2\vec{e}_1$$

$$L_{\mathcal{B}}(\vec{e}_3) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_3)\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\vec{b}_3\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}}(3\vec{b}_2 + \vec{b}_3) = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Damit gilt $L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) [3 Punkte]
Wir bestimmen $S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ spaltenweise:

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}(\vec{e}_1) &= K_{\mathcal{B}'}\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1)\right) = K_{\mathcal{B}'}(\vec{b}_1) = K_{\mathcal{B}'}(\tfrac{1}{2}\vec{b}_1') = \frac{1}{2}\vec{e}_1 \\ S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}(\vec{e}_2) &= K_{\mathcal{B}'}\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2)\right) = K_{\mathcal{B}'}(\vec{b}_2) = K_{\mathcal{B}'}(\vec{b}_2' - \vec{b}_3') = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}(\vec{e}_3) &= K_{\mathcal{B}'}\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_3)\right) = K_{\mathcal{B}'}(\vec{b}_3) = K_{\mathcal{B}'}(\vec{b}_3') = \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Wir erhalten damit $S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) [1 Punkt]

Ja, denn nach Aufgabenteil (a) ist L nicht surjektiv, daher kann L auch nicht bijektiv sein und es gilt det(L)= 0.

Alternativ: Es gilt $\det(L) = \det(L_{\mathcal{B}}) \overset{(b)}{=} 0$, da die Spalten von $L_{\mathcal{B}}$ offenbar linear abhängig sind.

6. **Aufgabe** **(6 Punkte)**

Gegeben sei der Vektorraum

$$W := \left\{ a\left(x^3+x^2\right) + b(x+1) \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq R_{\leq 3}[x]$$

zusammen mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ auf W definiert durch

$$\left\langle a\left(x^3+x^2\right) + b\,(x+1)\,, c\left(x^3+x^2\right) + d\,(x+1) \right\rangle_W := 4ac + 4bd$$

und der Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{p}_1 := x^3+x^2,\ \vec{p}_2 := x+1 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\text{ONB}}$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$.

(b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $K_{\mathcal{B}_{\text{ONB}}}(\vec{p})$ für $\vec{p} := 5\left(x^3+x^2\right) - 6\,(x+1) \in W$ bezüglich der von Ihnen in Teil (a) berechneten Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\text{ONB}}$.

(c) Sei $\alpha < 0$ beliebig. Ist die Abbildung $\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle_0 := \alpha \cdot \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle_W$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum W?

Lösung:

(a) [3 Punkte]
Wir berechnen:

$$q_1 = \frac{\vec{p}_1}{\|\vec{p}_1\|_W} = \frac{\vec{p}_1}{\sqrt{\langle \vec{p}_1, \vec{p}_1 \rangle_W}} = \frac{x^3+x^2}{\sqrt{4\cdot 1\cdot 1}} = \frac{1}{2}\left(x^3+x^2\right)$$

$$l_2 = \vec{p}_2 - \langle \vec{p}_2, \vec{q}_1 \rangle_W \cdot \vec{q}_1 = (x+1) - \langle x+1, \frac{1}{2}\left(x^3+x^2\right) \rangle_W \cdot \frac{1}{2}(x^3+x^2) = x+1$$

$$q_2 = \frac{l_2}{\|l_2\|_W} = \frac{l_2}{\sqrt{\langle l_2, l_2 \rangle_W}} = \frac{x+1}{\sqrt{4\cdot 1\cdot 1}} = \frac{1}{2}\,(x+1)$$

Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert somit die Orthonormalbasis

$$\mathcal{B}_{\text{ONB}} = \left\{ \vec{q}_1 = \frac{1}{2}\left(x^3+x^2\right),\ \vec{q}_2 = \frac{1}{2}\,(x+1) \right\}.$$

(b) [2 Punkte]
Wir berechnen $\langle \vec{p}, \vec{q}_1 \rangle_W = 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 10$ für die erste und $\langle \vec{p}, \vec{q}_2 \rangle_W = 4 \cdot (-6) \cdot \frac{1}{2} = -12$ für die zweite Komponente. Wir erhalten $K_{\mathcal{B}_{\text{ONB}}}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \end{pmatrix}$.

(c) [1 Punkt]
Nein, da beispielsweise $\langle \vec{q}_1, \vec{q}_1 \rangle_0 = \alpha < 0$ gilt und somit $\langle\ ,\ \rangle_0$ nicht positiv definit ist.