Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: R. Schneider, P. Winkert
Ass.: H. Eble, B. Kutschan

Wintersemester 2017/18
13. April 2018

Modulprüfung
„Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden! Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte!

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 22 Punkten bestanden.

Hiermit erkläre ich, dass

- **mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann. (§ 39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO)**
- **mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist. (§ 39 Abs. 2 AllgStuPO)**
- **mir bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.**

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ in normierte Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie $\dim(\text{Bild}(A))$ und $\dim(\text{Kern}(A))$.

(d) Geben Sie eine Basis des Bildes von A an.

(e) Geben Sie einen Vektor an, der nicht im Kern von A liegt.

2. **Aufgabe** **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B.

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum und die geometrische Vielfachheit des betragsmäßig größten Eigenwerts von B.

(c) Ist B diagonalisierbar?

(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t), \qquad \vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. **Aufgabe** **(7 Punkte)**

Betrachten Sie die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von C mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz (angewandt auf 4×4- und 3×3-Matrizen).

(b) Betrachten Sie nun die reellen 4×4-Matrizen

$$C_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(C_1)$ und $\det(C_2)$ aus $\det(C)$ anhand gewisser Eigenschaften der Determinante, d.h. **ohne Verwendung** der Laplace-Entwicklung.

(c) Berechnen Sie $\det\left(C^T \cdot C^{-1}\right)$.

4. Aufgabe **(6 Punkte)**

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Beweisen oder widerlegen Sie Ihre Aussagen.

(a) $L_1 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_2 - 4v_3 \\ 2v_1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $L_2 \colon \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2} \; ax + b \longmapsto \begin{pmatrix} 2a+b & b \\ b & a \end{pmatrix}$

(c) $L_3 \colon \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 1}[x], \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ax + (cd + b)$

5. Aufgabe **(9 Punkte)**

Gegeben sei der Vektorraum $V := \left\{ ax^3 + bx^2 + c(x+1) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ mit der Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := x^3,\ \vec{b}_2 := x^2,\ \vec{b}_3 := x + 1 \right\}$$

und die lineare Abbildung

$$L \colon V \longrightarrow V$$
$$ax^3 + bx^2 + c(x+1) \longmapsto 2(a+c)x^3 + (a+c)x^2 + 3c(x+1).$$

(a) Berechnen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

(b) Gegeben seien nun eine zweite Basis

$$\mathcal{B}' := \left\{ \vec{b}'_1 := x^3 + x^2,\ \vec{b}'_2 := 2x^2,\ \vec{b}'_3 := 3(x+1) \right\}$$

von V und Transformationsmatrizen $S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ und $S_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}'}$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{B}'$ mithilfe der Matrizen $L_{\mathcal{B}}, S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ und $S_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.

(c) Bestimmen Sie $L(4x^2)$ und geben Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(L)$ an.

6. Aufgabe **(6 Punkte)**

Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet.

(a) Bestimmen Sie aus den Spalten von A mittels Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

(b) Geben Sie die QR-Zerlegung von A an.

Gesamtpunktzahl: 45 Punkte