TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 01
Fakultät II - Mathematik Stand: 25. Juli 2001
Lutz
Herrmann

Lösungen zur Klausur (Rechenteil)
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

a) Berechnen Sie den Realteil und den Imaginärteil von $z = \exp(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \exp(i\frac{\pi}{4}))$:

$$z = \exp(\tfrac{\pi}{\sqrt{2}}(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{i}{\sqrt{2}})) \quad = \exp(\tfrac{\pi}{2}) \exp(i\tfrac{\pi}{2}) = i \exp(\tfrac{\pi}{2})$$

$$\Longrightarrow \quad Im(z) = \exp(\tfrac{\pi}{2}) \text{ und } Re(z) = 0$$

b) $w^6 = 64 \qquad \Leftrightarrow \qquad w_k = 2e^{i\frac{2\pi k}{6}} \quad \text{für } k = 0...5$

Also sind die Lösungen in $\mathbb{C}$:

$$z_0 = 2 \quad z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad z_3 = -2, \quad z_4 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}, \qquad z_5 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ der Ungleichung $|x-2| \geq 3|x+4|$

Fallunterscheidung:

I) $x \geq 2$:
$$\begin{aligned} & x - 2 \geq 3(x+4) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \geq 2x + 14 \\ \Leftrightarrow \quad & -7 \geq x \qquad \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \emptyset \end{aligned}$$

II) $-4 \leq x \leq 2$:
$$\begin{aligned} & -(x-2) \geq 3(x+4) \\ \Leftrightarrow \quad & -10 \geq 4x \\ \Leftrightarrow \quad & -\tfrac{5}{2} \geq x \qquad \Rightarrow \mathbb{L}_2 = [-4, -\tfrac{5}{2}] \end{aligned}$$

III) $x < -4$:
$$\begin{aligned} & -(x-2) \geq -3(x+4) \\ \Leftrightarrow \quad & 16 \geq -2x \\ \Leftrightarrow \quad & -7 \leq x \qquad \Rightarrow \mathbb{L}_3 = [-7, -4[\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = [-7, -\tfrac{5}{2}]$$

2. Aufgabe (5 Punkte)

a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos 4x^2 \, dx = [\frac{1}{8} \sin 4x^2]_0^{\sqrt{\pi}} = 0$

b)
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx &= [e^x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx \\ &= [e^x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx = -\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)\end{aligned}$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren oder $\pm\infty$ sind.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(e^n + e^{-n})^2}{3e^{2n} + e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n} + 2 + e^{-2n}}{3e^{2n} + e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2e^{-2n} + e^{-4n}}{3 + e^{-n}} = \frac{1}{3}$

b)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} && \text{wegen de l'Hopital,} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4 \cos 2x}{2} = 2 && \text{wegen de l'Hopital,}\end{aligned}$$

4. Aufgabe (5 Punkte)

a) Wegen $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x$ und $f^{(4)}(x) = \sin x$ ist das Taylorpolynom 3. Grades von f gegeben durch
$$\begin{aligned}T_3(x) &= f(2\pi) + f'(2\pi)(x - 2\pi) + \frac{f''(2\pi)}{2}(x - 2\pi)^2 + \frac{f'''(2\pi)}{3!}(x - 2\pi)^3 \\ &= (x - 2\pi) - \frac{1}{6}(x - 2\pi)^3\end{aligned}$$

Der Fehler berechnet sich als
$$|R_3(x)| = |\frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!}(x - 2\pi)^4| < \frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{24}(\frac{\pi}{6})^4 = \frac{1}{48}\frac{\pi^4}{6^4},$$

da $f^{(4)}(x) = \sin x$ monoton wachsend im Intervall $[\pi, 3\pi]$.

b) Geben Sie die Taylorreihe von $\frac{1}{1+x^3}$ an der Stelle $x_0 = 0$ an:
$$\frac{1}{1 + x^3} = \frac{1}{1 - (-x^3)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k},$$

wegen geometrische Reihe (für $|x^3| \leq 1$).

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 01
Fakultät II - Mathematik Stand: 25. Juli 2001
Lutz
Herrmann

Lösungen zur Klausur vom 23.7.2001 (Verständnisteil) Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Behauptung: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A(n) : \sum_{k=0}^{n} f_k^2 = f_{n+1} f_n.$$

Induktionsanfang ($n = 0$):

$\sum_{k=0}^{0} f_k^2 = f_0 f_0 = f_1 f_0$, da $f_0 = f_1 \quad \Rightarrow \quad A(0)$ ist wahr.

($n = 1$ gibt auch einen Punkt)

Induktionsvoraussetzung (IV): Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n)$

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $A(n+1)$

Beweis(der Induktionsbehauptung)

$$\sum_{k=0}^{n+1} f_k^2 = \sum_{k=0}^{n} f_k^2 + f_{n+1}^2 \overset{IV}{=} f_{n+1} f_n + f_{n+1}^2 = f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) = f_{n+1} f_{n+2}$$

kennzeichnen mit IV:

Also haben wir die Behauptung mit vollständiger Induktion bewiesen.

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) wahr, denn $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ und nach dem **Vergleichskriterium** folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$.

b) wahr, das ist das **Leibnizkriterium**.

c) falsch, da z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $f(x) = 0$ für $x < 0$ nicht stetig an der Stelle $x = 0$, Aber erfüllt das Kriterium mit $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

d) falsch, da z.B. $f : [0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x$

3. Aufgabe

(5 Punkte)

b) Dann ist der Konvergenzradius höchstens $|-1+i| = \sqrt{2}$. Also mit a) folgt, dass der Konvergenradius genau $\sqrt{2}$ ist. Daher konvergiert die P.R. für i und 5 nicht.

a) Da die P.R. für $z = 1$ konvergiert, ist der K.R. mindestens $|1+i| = \sqrt{2}$. Also ist die P.R. an den Stellen 0 und $-2i$ konvergent. An den anderen Stellen kann man keine Aussagen machen.

Skizze:

4. Aufgabe

(3 Punkte)

$$\ln_x 5^x = \frac{\ln 5^x}{\ln x} = \frac{x \ln 5}{\ln x}$$

1. Definition von $\ln_x$
2. Rechenregel von $\ln_x$

$$\frac{d}{dx} \ln_x 5^x = \frac{d}{dx} \frac{x \ln 5}{\ln x} = \frac{\ln 5 \ln x - \ln 5}{(\ln x)^2}$$

3. Quotientenregel