Vollklausur RECHENTEIL: LÖSUNGEN

1. Induktion.

Ind. Anfang: $n = 0$

$$\text{l.S.} = \sum_{k=0}^{0} \frac{4k}{3^{k+1}} = 0 = 1 - \frac{0+3}{3^{0+1}} = \text{r.S.}$$

(Alles $\boxed{\text{1 Punkt}}$)

I.Schluss. Sei $m \in \mathbb{N}$ bel. aber fest. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

I.V./I.Ann.: es gilt $\sum_{k=0}^{m} \frac{4k}{3^{k+1}} = 1 - \frac{2m+3}{3^{m+1}}$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

I.Beh.: es gilt auch $\sum_{k=0}^{m+1} \frac{4k}{3^{k+1}} = 1 - \frac{2(m+1)+3}{3^{(m+1)+1}}$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Beweis: I.V. $\Rightarrow$ I.Beh.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} \frac{4k}{3^{k+1}} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{4k}{3^{k+1}} + \frac{4m+4}{3^{m+2}} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} 1 - \frac{2m+3}{3^{m+1}} + \frac{4m+4}{3^{m+2}} \boxed{\text{1 Punkt}} \\
&= 1 + \frac{-6m-9+4m+4}{3^{m+2}} \\
&= 1 - \frac{2m+5}{3^{m+2}} \\
&= 1 - \frac{2(m+1)+3}{3^{(m+1)+1}} \boxed{\text{1 Punkt}}
\end{aligned}$$

2. Rekursive Folge.
a) Beschränktheit mit vollst. Induktion.
I.A.: $n = 0$: $a_0 = 1 < 2$
I.Schluss. Sei $m \in \mathbb{N}$ bel., fest.
I.V./I.Ann.: es gilt $a_m < 2$
I.Beh.: $a_{m+1} < 2$
Beweis: I.V. $\Rightarrow$ I.Beh.

$$a_{m+1} = \frac{a_m}{2} + 1 \overset{\text{I.V.}}{<} \frac{2}{2} + 1 = 2$$

1 Punkt	Formale Korrektheit d. Induktion
1 Punkt	Rechnungen

Monotonie. Sei $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rrcll} & a_{n+1} & > & a_n & \\ \Leftrightarrow & \frac{a_n}{2} + 1 & > & a_n & \mid - \frac{a_n}{2} \\ \Leftrightarrow & 1 & > & \frac{a_n}{2} & \mid \cdot 2 \\ \Leftrightarrow & 2 & > & a_n & \end{array}$$

$\boxed{\text{1 Punkt}}$
b) Konvergenz: Ja, mögliche Begründungen (alternativ):
- Monoton **steigend** und nach oben beschränkt;
- monoton und nach oben **und nach unten** (Schranke z.B 0) beschränkt. $\boxed{\text{1 Punkt}}$
Der Grenzwert existiert also; wir nennen ihn a. Dann gilt mit den Grenzwertsätzen für konvergente Folgen

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2} + 1 = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{2} + 1 = \frac{a}{2} + 1.$$

Der Grenzwert a muss also die Gleichung $a = \frac{a}{2} + 1$ erfüllen. Darum kann nur $a = 2$ der Grenzwert sein. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

3. $\infty - \infty = ?$

Vereinfachen des Ausdruckes.

$$\begin{aligned}
\frac{3x+2}{x^2-1} + \frac{2x+1}{2x+2} &= \frac{6x+4}{2(x^2-1)} + \frac{(2x+1)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} \boxed{\text{1 Punkt}} \\
&= \frac{1}{2(x^2-1)}\Big(6x+4+(2x^2-2x+x-1)\Big) \\
&= \frac{1}{2(x^2-1)}\Big(2x^2+x(6-2+1)+(4-1)\Big) \\
&= \frac{1}{2(x^2-1)}\Big(2x^2+5x+3\Big) \\
&= \frac{1}{2(x^2-1)}(x+1)(2x+3) \\
&= \frac{2x+3}{2(x-1)} \boxed{\text{1 Punkt}}
\end{aligned}$$

a) Die Unstetigkeitsstelle in -1 ist hebbar. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \left.\frac{2x+3}{2(x-1)}\right|_{x=-1} = \frac{-2+3}{2(-2)} = -\frac{1}{4} \boxed{\text{1 Punkt}}$$

b) Die Unstetigkeitsstelle in 1 ist nicht hebbar. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Anmerkung: Die Regel von L'Hospital wurde in der Veranstaltung nicht gemacht und war für die Lösung der Klausur nicht notwendig. Wenn man L'Hospital benutzen möchte, darf man das nur tun, wenn der Grenzwert von Zähler *und* Nenner an der im Grenzwert betrachteten Stelle Null ist (was man mit "$\frac{0}{0}$" abkürzt).

4. Ableiten.

(a)

$$f'(x) = \frac{-2x(1-x)^2+2(1-x)(1-x^2)}{(1-x)^4} = \frac{-2x+2(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} \boxed{\text{2 Punkte}}$$

(b)

$$f'(x) = -4\sinh(\cos(x^4))\sin(x^4)x^3 \boxed{\text{2 Punkte}}$$

(c) Ansatz $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ oder $f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$ (Wird der Ansatz nicht hingeschrieben, aber korrekt benutzt, wird der Punkt auch gegeben.)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1+\ln x \boxed{\text{1 Punkt}} \\
f'(e^2) &= 1+\ln e^2 = 1+2 = 3 \\
(f^{-1})'(2e^2) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(2e^2))} = \frac{1}{f'(e^2)} = \frac{1}{3} \boxed{\text{1 Punkt}}
\end{aligned}$$

5. Taylor und DGL

Berechnung der 2. Ableitung.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (f'(x))' \\
&\overset{\text{DGL}}{=} (f(x)\cos(x))' \boxed{\text{1 Punkt}} \\
&\overset{\text{Prod}}{=} f'(x)\cos(x) + f(x)(-\sin(x)) \boxed{\text{1 Punkt}} \\
&\overset{\text{DGL}}{=} f(x)\cos^2(x) - f(x)\sin(x) \\
&= f(x)\Big(\cos^2(x) - \sin(x)\Big)
\end{aligned}$$

Auswerten der Ableitungen $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= f(0)\cos(0) = 1 \cdot 1 = 1 \\
f''(0) &= f(0)(\cos^2(0) - \sin(0)) = 1(1-0) = 1.
\end{aligned}$$

Aufstellen des Taylor-Polynoms

$$T_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Aufstellen des Restgliedes.

$$R_{2,0}(x) = \frac{1}{6}f'''(\xi)x^3, \quad \xi \in [0,x] \text{ bzw.} [x,0] \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Abschätzen des Restgliedes.

$$\begin{aligned}
|R_{2,0}(x)| &= \frac{1}{6}|f'''(\xi)||x|^3 \\
&\leq \frac{1}{6}\sup_{\xi\in D}|f'''(\xi)| \sup_{x\in D}|x|^3 \\
&= \frac{1}{6}\sup_{\xi\in D}|f(\xi)| \underbrace{|\cos(\xi)|}_{\leq 1}\underbrace{|\sin(\xi)|}_{\leq 1}|\sin(\xi) - 3| \underbrace{\sup_{x\in D}|x|^3}_{=(\frac{\pi}{2})^3} \boxed{\text{1 Punkt}} \\
&\leq \frac{1}{6}(\frac{\pi}{2})^3 \sup_{\xi\in D}|f(\xi)|\underbrace{|\sin(\xi) - 3|}_{\leq 4} \boxed{\text{1 Punkt}}
\end{aligned}$$

Da $f > 0$ nach Aufgabenstellung und $\cos > 0$ auf D, ist $f' > 0$ und die Funktion monoton steigend. Wg $f(-\frac{\pi}{2}) > 0$ ist $f > 0$ überall, also

$$\begin{aligned}
\sup_{\xi\in D}|f(\xi)| &= \sup_{\xi\in D} f(\xi) = f(\frac{\pi}{2}) = e \quad \boxed{\text{1 Punkt}} \text{ und insgesamt} \\
|R_{2,0}(x)| &\leq \frac{2}{3}e\left(\frac{\pi}{2}\right)^3.
\end{aligned}$$

6. Integrale.

a) Poly.div oder ähnliches: $\frac{(1+x)^2}{1+x^2} = 1 + \frac{2x}{1+x^2}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$, dann Subst.

$$\begin{aligned}
\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx &= \int dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx \\
&= x + \int \frac{1}{x^2+1}2xdx \quad (y = x^2, \frac{dy}{dx} = 2x) \boxed{\text{1 Punkt}} \boxed{\text{Hin- u. Rücksubs}} \\
&= x + \int \frac{1}{1+y}dy \\
&= x + \ln|y+1| = x + \ln|x^2+1| = x + \ln(x^2+1) \boxed{\text{1 Punkt}}
\end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned}
x + \int \frac{(x^2)'}{x^2+1}dx &= x + \int (\ln(x^2+1))'dx \boxed{\text{1 Punkt}} \\
&= x + \ln(x^2+1) \boxed{\text{1 Punkt}}
\end{aligned}$$

natürlich ist auch $x + \ln(x^2+1) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

b) 2 mal Partielle Integration.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x^2}_{=u} \underbrace{\sin x}_{=v'} dx \quad (\text{mit } u' = 2x, v = -\cos x) \\
&= -x^2 \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx \boxed{\text{1 Punkt}} \\
&= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{2x}_{=u} \underbrace{\cos x}_{=v'} dx \quad (\text{ mit } u' = 2, v = \sin x) \\
&= 2x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx \boxed{\text{1 Punkt}} \\
&= \underbrace{2\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}}_{=\pi} - 0 \underbrace{-2(-\cos x)}_{=2\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi + 2(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = \pi - 2 \quad \boxed{\text{1 Punkt}}
\end{aligned}$$

c) Substitution und Partielle Int.

$$\begin{aligned}
&\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx \quad (t = \sqrt{x}, x = t^2, dx = 2tdt) \\
&= \int_1^2 e^t 2tdt \quad \boxed{\text{1 Punkt}} \\
&= \int_1^2 \underbrace{e^t}_{=v'} \underbrace{2t}_{=u} dt \quad (\text{ mit } v = e^t, u' = 2) \\
&= e^t 2t\Big|_1^2 - \int_1^2 e^t 2dt \quad \boxed{\text{1 Punkt}} \\
&= (e^t 2t - 2e^t)\Big|_1^2 = (2e^t(t-1))\Big|_1^2 \\
&= 2e^2 \cdot 1 - 2e \cdot 0 = 2e^2 \quad \boxed{\text{1 Punkt}}
\end{aligned}$$