Oktober – (Voll-) Klausur
Analysis I für Ingenieure

Lösungen

Rechenteil P- und Ü-Klausur

1. Aufgabe 7 Punkte

Für $x < -6$ wird der Ausdruck

$$\frac{|x-2|}{x+6}$$

negativ. Für $x > -6$ ist $x + 6 > 0$. Damit erhält man

$$|x-2| \geq x+6.$$

Fallunterscheidung:

(1) $x \geq 2$: man erhält $x - 2 \geq x + 6$, d.h. $0 \geq 8$

(2) $x < 2$: dann $2 - x \geq x + 6$, woraus sich $x \leq -2$ ergibt.

Damit bekommt man als Lösung $x \in]-6, -2]$.

2. Aufgabe 8 Punkte

(a) **1. Beh.:** Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

Bew.: IA: $a_0 = 1 \leq 2 = a_1$

IB: Für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gelte $a_{n_0} \leq a_{n_0+1}$.

IS: Es ist zu zeigen: $a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2}$

Wegen der Monotonie der Wurzelfunktion und der IB gilt: $\sqrt{a_{n_0}} \leq \sqrt{a_{n_0+1}}$. Daher ist

$$a_{n_0+1} = \sqrt{a_{n_0}} + 1 \leq \sqrt{a_{n_0+1}} + 1 = a_{n_0+2}.$$

2. Beh.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq 3$.

Bew.: IA: $a_0 = 1 \leq 3$

IB: Für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gelte $a_{n_0} \leq 3$.

IS: Es ist zu zeigen: $a_{n_0+1} \leq 3$

Aus $a_{n_0+1} = \sqrt{a_{n_0}} + 1$ erhält man aus der IB und der Monotonie der Wurzelfunktion $a_{n_0+1} \leq \sqrt{3} + 1 \leq 3$.

(b) Aus der VL ist bekannt: Jede beschränkte monotone Folge reeller Zahlen ist konvergent. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Dieses berechnen wir wie folgt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} + 1 = \sqrt{a} + 1,$$

daraus erhält man

$$(a-1)^2 = a \Leftrightarrow a^2 - 3a + 1 = 0.$$

Damit ergibt sich $a_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ und $a_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Da $a_n \in [1,3]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $a \geq 1$ gilt, ist $a = a_1$.

3. Aufgabe 8 Punkte

(a) Es ist $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

(b) Die Funktion f besitzt kein globales Maximum, da z.B. mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n < -1$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = -1$

$$f(x_n) \longrightarrow \infty \quad (n \longrightarrow \infty)$$

folgt.

(c) Für die erste Ableitung erhält man

$$f'(x) = 3x - 4 + \frac{4}{(x+1)^2}$$

und für die Nullstellen von $f'(x)$ dann

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(3x^2 + 2x - 5) = 0,$$

also

$$x_1 = 0, x_2 = 1 \text{ und } x_3 = -\frac{5}{3}.$$

Mit $f(0) = -4$, $f(1) = -4.5$ und $f(3) = \frac{1}{2}$ erhält man als globales Maximum $\frac{1}{2}$ und als globales Minimum -4.5 auf dem Intervall $[0,3]$.

4. Aufgabe 4 Punkte

(a) Mit

$$f_1(x) = \sin\sqrt{x^2-1},$$
$$f_2(x) = 2+\cos\sqrt{x^2+1}$$

und

$$g(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

erhält man

$$f_1'(x) = \frac{\left(\cos\sqrt{x^2-1}\right)x}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$f_2'(x) = -\frac{\left(\sin\sqrt{x^2+1}\right)x}{\sqrt{x^2+1}}$$

und

$$g'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{\left(f_2(x)\right)^2}.$$

Schließlich ist

$$g(x)' = \left[\frac{\left(\cos\sqrt{x^2-1}\right)x\left(2+\cos\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2-1}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin\sqrt{x^2-1}\left(\sin\sqrt{x^2+1}\right)x}{\sqrt{x^2+1}}\right]\frac{1}{\left(2+\cos\sqrt{x^2+1}\right)^2} =$$
$$\frac{\left(\cos\sqrt{x^2-1}\right)x}{\sqrt{x^2-1}\left(2+\cos\sqrt{x^2+1}\right)} + \frac{\sin\sqrt{x^2-1}\left(\sin\sqrt{x^2+1}\right)x}{\sqrt{x^2+1}\left(2+\cos\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

5. Aufgabe 8 Punkte

(a) Das Polynom $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x$ zerlegt man in $p(x) = 2x\,(x-1)^2$. Mit dem Ansatz

$$\frac{5x^2 - 7x + 4}{2x^3 - 4x^2 + 2x} = \frac{5x^2 - 7x + 4}{2x\,(x-1)^2} = \frac{A}{2x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

ergibt sich z.B. mit der Zuhaltemethode

$$A = 4, B = \frac{1}{2}, \text{ und } C = 1.$$

Damit erhält man folgendes Integral:

$$\int_2^4 \frac{5x^2 - 7x + 4}{2x\,(x-1)^2}\,dx = 2\int_2^4 \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_2^4 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx,$$

also

$$\int_2^4 \frac{5x^2 - 7x + 4}{2x\,(x-1)^2}\,dx = [2\ln x]_2^4 + \left[\frac{1}{2}\ln x\right]_1^3 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = 2\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{2}{3}.$$

(b) Mit der Substitution $z = x^2$ erhält man $dx = \frac{dz}{2x}$ und schließlich für $b \geq 0$ ($b \in \mathbb{R}$)

$$\int_0^b x^3 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} z e^{-z}\,dz.$$

Durch partielle Integration mit dem Ansatz $f(z) = z,\ g(z) = -e^{-z},\ f'(z) = 1$ und $g'(z) = e^{-z}$ berechnet man

$$\frac{1}{2}\int_0^{b^2} f(z)g'(z)\,dz = \frac{1}{2}\left[-ze^{-z}\right]_0^{b^2} + \int_0^{b^2} e^{-z}\,dz = \frac{-e^{-b^2}b^2 - e^{-b^2} + 1}{2}.$$

Durch Grenzübergang erhält man

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^3 e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-b^2}b^2 - e^{-b^2} + 1}{2} = \frac{1}{2},$$

da aus der Vorlesung bekannt ist, dass

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{b^2}{e^{b^2}} = 0 \text{ und } \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{e^{b^2}} = 0$$

gilt.

6. Aufgabe 5 Punkte

Für

$$f(x) = \sin x \cos x + 4x^2$$

berechnet man für die erste und zweite Ableitung

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 8x,$$

$$f''(x) = -4 \sin x \cos x + 8$$

und

$$f'''(x) = -4(\cos^2 x - \sin^2 x).$$

Für das Taylorpolynom 2. Ordnung berechnet man

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi^2, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (4\pi - 1) \text{ und } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8$$

und erhält daraus das Taylorpolynom

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= \pi^2 + (4\pi - 1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 4x^2 - x + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

und für das Restglied gilt wegen $|\cos^2 \xi - \sin^2 \xi| \leq 1$

$$|R_2(x)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \right| = \left| \frac{4(\cos^2 \xi - \sin^2 \xi)}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \right| \leq \frac{4}{6}\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

für $x \in [0, 2\pi]$ ($\xi \in [\frac{\pi}{2}, x]$ für $x \geq \frac{\pi}{2}$ bzw. $\xi \in [x, \frac{\pi}{2}]$ für $x < \frac{\pi}{2}$).

Rechenteil 2/3-Klausur

1. Aufgabe 7 Punkte

(a) Das Polynom $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x$ zerlegt man in $p(x) = 2x\,(x-1)^2$. Mit dem Ansatz

$$\frac{5x^2 - 7x + 4}{2x^3 - 4x^2 + 2x} = \frac{5x^2 - 7x + 4}{2x\,(x-1)^2} = \frac{A}{2x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

ergibt sich z.B. mit der Zuhaltemethode

$$A = 4, B = \frac{1}{2}, \text{ und } C = 1.$$

Damit erhält man folgendes Integral:

$$\int_2^4 \frac{5x^2 - 7x + 4}{2x\,(x-1)^2}\,dx = 2\int_2^4 \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_2^4 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx,$$

also

$$\int_2^4 \frac{5x^2 - 7x + 4}{2x\,(x-1)^2}\,dx = [2\ln x]_2^4 + \left[\frac{1}{2}\ln x\right]_1^3 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = 2\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{2}{3}.$$

(b) Mit der Substitution $z = x^2$ erhält man $dx = \frac{dz}{2x}$ und schließlich für $b \geq 0$ ($b \in \mathbb{R}$)

$$\int_0^b x^3 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} z e^{-z}\,dz.$$

Durch partielle Integration mit dem Ansatz $f(z) = z$, $g(z) = -e^{-z}$, $f'(z) = 1$ und $g'(z) = e^{-z}$ berechnet man

$$\frac{1}{2}\int_0^{b^2} f(z)g'(z)\,dz = \frac{1}{2}\left[-ze^{-z}\right]_0^{b^2} + \int_0^{b^2} e^{-z}\,dz = \frac{-e^{-b^2}b^2 - e^{-b^2} + 1}{2}.$$

Durch Grenzübergang erhält man

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^3 e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-b^2}b^2 - e^{-b^2} + 1}{2} = \frac{1}{2},$$

da aus der Vorlesung bekannt ist, dass

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{b^2}{e^{b^2}} = 0 \text{ und } \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{e^{b^2}} = 0$$

gilt.

2. Aufgabe 8 Punkte

(a) Es ist $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

(b) Die Funktion f besitzt kein globales Maximum, da z.B. mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n < -1$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = -1$

$$f(x_n) \longrightarrow \infty \quad (n \longrightarrow \infty)$$

folgt.

(c) Für die erste Ableitung erhält man

$$f'(x) = 3x - 4 + \frac{4}{(x+1)^2}$$

und für die Nullstellen von $f'(x)$ dann

$$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x(3x^2 + 2x - 5) = 0,$$

also

$$x_1 = 0, x_2 = 1 \text{ und } x_3 = -\frac{5}{3}.$$

Mit $f(0) = -4$, $f(1) = -4.5$ und $f(3) = \frac{1}{2}$ erhält man als globales Maximum $\frac{1}{2}$ und als globales Minimum -4.5 auf dem Intervall $[0, 3]$.

3. Aufgabe 5 Punkte

Für

$$f(x) = \sin x \cos x + 4x^2$$

berechnet man für die erste und zweite Ableitung

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 8x,$$
$$f''(x) = -4 \sin x \cos x + 8$$

und

$$f'''(x) = -4(\cos^2 x - \sin^2 x).$$

Für das Taylorpolynom 2. Ordnung berechnet man

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi^2, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (4\pi - 1) \text{ und } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8$$

und erhält daraus das Taylorpolynom

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= \pi^2 + (4\pi - 1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 4x^2 - x + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

und für das Restglied gilt wegen $|\cos^2 \xi - \sin^2 \xi| \leq 1$

$$|R_2(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right| = \left|\frac{4(\cos^2 \xi - \sin^2 \xi)}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right| \leq \frac{4}{6}\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

für $x \in [0, 2\pi]$ ($\xi \in [\frac{\pi}{2}, x]$ für $x \geq \frac{\pi}{2}$ bzw. $\xi \in [x, \frac{\pi}{2}]$ für $x < \frac{\pi}{2}$).

Verständnisteil P- und Ü-Klausur

1. Aufgabe 7 Punkte

Es ist $|z_1| = \sqrt{2+2} = 2$ und $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$, daher gilt $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$. Da z_1 eine Lösung der Gleichung $z^3 = w$ ist, folgt

$$w = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = 8e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad .$$

Die Gleichung hat noch zwei weitere Lösungen z_2 und z_3 . Diese sind durch

$$z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

und

$$z_3 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

gegeben.

2. Aufgabe 8 Punkte

Offensichtlich ist die Funktion g stetig in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wir untersuchen g an der Stelle 0 auf Stetigkeit. Hier ist

$$\lim_{x\searrow 0} g(x) = \lim_{x\searrow 0}\left(8x + \frac{x^2}{7}\right) = 0$$

und

$$\lim_{x\nearrow 0} g(x) = \lim_{x\nearrow 0}(-2x) = 0 \qquad ,$$

d.h. der rechts- und linksseitige Grenzwert stimmen bei 0 mit dem Funktionswert $g(0) = 0$ überein und es folgt, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist .

Außerhalb von 0 ist g differenzierbar, die Ableitung ist durch

$$g'(x) = \begin{cases} 8 + \frac{2}{7}x & \text{für } x > 0 \\ -2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

gegeben. Bei 0 ist g nicht differenzierbar, da

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\searrow 0}\frac{8x+\frac{x^2}{7}}{x} = \lim_{x\searrow 0}\left(8+\frac{x}{7}\right) = 8$$

und

$$\lim_{x\nearrow 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\nearrow 0}\frac{-2x}{x} = -2$$

nicht übereinstimmen .

3. Aufgabe 7 Punkte

Es ist

$$p'(x) = 6abx + bc \quad \text{und} \quad p''(x) = 6ab \qquad .$$

Das Taylorpolynom 1. Ordnung am Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ ist

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \frac{p(2)}{0!}(x-2)^0 + \frac{p'(2)}{1!}(x-2)^1 \\ &= 12ab + 2bc + a^2c + (12ab + bc)(x-2) \\ &= (12ab + bc)x - 12ab + a^2c \qquad . \end{aligned}$$

Das Restglied ist hier $R_2(x) = \frac{6ab}{2!}(x-2)^2$. Also kann der Fehler auf dem Intervall $[1, 4]$ durch

$$|R_2(x)| = |3ab||(x-2)^2| \leq |3ab||(4-2)^2| = 12|ab|$$

abgeschätzt werden.

Das Taylorpolynom 2. Grades stimmt natürlich mit der Funktion p überein, das Restglied R_3 ist identisch Null . Notfalls rechnet man das nach.

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \frac{p(2)}{0!}(x-2)^0 + \frac{p'(2)}{1!}(x-2)^1 + \frac{p''(2)}{2!}(x-2)^2 \\ &= 12ab + 2bc + a^2c + (12ab + bc)(x-2) + 3ab(x-2)^2 \\ &= 12ab + 2bc + a^2c + 12abx + bcx - 24ab - 2bc \\ &\quad + 3abx^2 - 12abx + 12ab \\ &= 3abx^2 + bcx + a^2c. \end{aligned}$$

Aus $p''' = 0$ folgt, dass das Restglied identisch verschwindet.

4. Aufgabe 4 Punkte

(a) FALSCH (b) WAHR (c) FALSCH (d) WAHR

5. Aufgabe 6 Punkte

(a) Wählt man z.B. $f(x) = 0$, so ist f auf dem Intervall $[3, \infty[$ stetig und es gilt

$$\int_3^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_3^b 0\, dx = 0 < \infty \quad .$$

(b) Wählt man z.B. $f(x) = 1$, so ist f auf dem Intervall $[3, \infty[$ stetig und wegen

$$\int_3^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 3) \quad .$$

existiert das uneigentliche Integral nicht.

6. Aufgabe 8 Punkte

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := 3\sinh x - \ln \frac{1}{x+3}.$$

In dem Intervall $[-2, 0]$ ist die Funktion f stetig und es gilt

$$f(-2) = 3\sinh(-2) - \ln 1 = 3\sinh(-2) < 0$$

und

$$f(0) = -\ln \frac{1}{3} > 0 \qquad .$$

Also existiert nach dem Zwischenwertsatz (mindestens) ein $x^* \in]-2, 0[$ mit der Eigenschaft $f(x^*) = 0$. Dieses x^* ist eine Löung der betrachten Gleichung .

(b) Um zu zeigen, dass die Lösung $x^* \in]-2, 0[$ aus Teil (a) eindeutig ist, verifizieren wir, dass die Funktion f streng monoton steigend im Intervall $]-2, 0[$ ist . Da f differenzierbar ist und

$$f'(x) = 3\cosh x - \frac{1}{\frac{1}{x+3}} \left(-\frac{1}{(x+3)^2} \right) = 3\cosh x + \frac{1}{x+3} > 0$$

für alle $x \in]-2, 0[$ gilt, folgt die strenge Monotonie von f und damit die Eindeutigkeit der Lösung x^* .

Verständnisteil 2/3-Klausur

4. Aufgabe 7 Punkte

Es ist $|z_1| = \sqrt{2+2} = 2$ und $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$, daher gilt $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$. Da z_1 eine Lösung der Gleichung $z^3 = w$ ist, folgt

$$w = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = 8e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad .$$

Die Gleichung hat noch zwei weitere Lösungen z_2 und z_3 . Diese sind durch

$$z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

und

$$z_3 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

gegeben.

5. Aufgabe 8 Punkte

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := 3\sinh x - \ln\frac{1}{x+3}.$$

In dem Intervall $[-2,0]$ ist die Funktion f stetig und es gilt

$$f(-2) = 3\sinh(-2) - \ln 1 = 3\sinh(-2) < 0$$

und

$$f(0) = -\ln\frac{1}{3} > 0 \qquad .$$

Also existiert nach dem Zwischenwertsatz (mindestens) ein $x^* \in]-2,0[$ mit der Eigenschaft $f(x^*) = 0$. Dieses x^* ist eine Löung der betrachten Gleichung .

(b) Um zu zeigen, dass die Lösung $x^* \in]-2,0[$ aus Teil (a) eindeutig ist, verifizieren wir, dass die Funktion f streng monoton steigend im Intervall $]-2,0[$ ist . Da f differenzierbar ist und

$$f'(x) = 3\cosh x - \frac{1}{\frac{1}{x+3}}\left(-\frac{1}{(x+3)^2}\right) = 3\cosh x + \frac{1}{x+3} > 0$$

für alle $x \in]-2,0[$ gilt, folgt die strenge Monotonie von f und damit die Eindeutigkeit der Lösung x^* .

6. Aufgabe 5 Punkte

(a) FALSCH (b) WAHR (c) FALSCH (d) WAHR (e) FALSCH