Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 08

Flad, Penn-Karras, Yserentant 21. Juli 2008

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

6 Punkte

Sind die folgenden Aussagen **immer richtig**?

(a) Seien A, B und C Mengen komplexer Zahlen und sei $A \cap B \neq \emptyset$ und $B \cap C \neq \emptyset$. Dann gilt auch $A \cap C \neq \emptyset$.

(b) Polynome sind unendlich oft differenzierbar.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert auch die Folge $(e^{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert auch die Folge $(\ln a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Folge $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Wert < 0.

(f) Differenzierbare Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sind automatisch beschränkt und nehmen auf ihrem Definitionsbereich ihr Infimum und Supremum an.

Beantworten Sie die Fragen nur mit „ja“ oder „nein“. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt und für jede falsche Antwort wird Ihnen ein Punkt abgezogen. Minimal können in dieser Aufgabe 0 Punkte erreicht werden.

2. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben sei ein komplexes Polynom

$$p(z) = z^3 + az^2 + bz + c$$

mit reellen Koeffizienten a, b und c. Weiterhin sei $p(i) = 0$, i die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$. Wieviele reelle Nullstellen hat p?

3. Aufgabe

6 Punkte

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 10. Grades der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \, x \mapsto (x-1)^6 + 3$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Geben Sie die kleinste obere Schranke für den Betrag des Restglieds für die Argumente $x \in [0,2]$ an.

Bitte wenden!

4. Aufgabe

8 Punkte

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Für alle $R > 0$ sei

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, \mathrm{d}x \;=\; 0.$$

(a) Begründen Sie, dass f eine Stammfunktion besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass jede Stammfunktion F von f gerade ist, also

$$F(x) = F(-x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(c) Folgt aus den Voraussetzungen, dass f über das Intervall $]-\infty, \infty[$ im uneigentlichen Sinn integrierbar ist, also das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$$

existiert? Beweis oder Gegenbeispiel!

5. Aufgabe

7 Punkte

Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum folgender Funktionen:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} e^{x/|x|} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

6. Aufgabe

6 Punkte

Bestimmen Sie die Stellen x, an denen die Funktion

$$F : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x \left(1 + (\sin t)^4\right) \mathrm{d}t$$

ihre lokalen und globalen Extrema annimmt; die zugehörigen Funktionswerte brauchen nicht berechnet zu werden.