1. Aufgabe

8 Punkte

Geben Sie die Bereiche, auf denen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x^2 + 1)\, e^{-x^2}$ monoton wachsend oder fallend ist, an, und untersuchen Sie die Funktion auf lokale und globale Extrema.

$f(x) = (x^2 + 1)\, e^{-x^2}$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2xe^{-x^2} + \left(x^2 + 1\right) e^{-x^2} (-2x) \\
&= -2x^3 e^{-x^2}.
\end{aligned}
$$

Das ist nur für $x = 0$ gleich Null, das heißt das ist der einzige Kandidat für eine Extremstelle. Da $f''(0) = f'''(0) = 0$ und $f^{(4)}(0) = -12$ ist hier tatsächlich ein lokales Maximum, welches zugleich global ist. Daraus folgt, dass die Funktion auf dem Intervall $]-\infty, 0[$ streng monoton wachsend und auf $]0, \infty[$ streng monoton fallend ist.

Andere Möglichkeit: Man kann auch mit Hilfe der ersten Ableitung die Stelle $x = 0$ herausfinden und das Monotonieverhalten (s. oben) begründen, denn $f'(x) < 0$ für $x > 0$ und $f'(x) > 0$ für $x < 0$, denn der Ausdruck e^{-x^2} erfüllt für alle $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x^2} > 0$. Daraus ergibt sich dann, dass bei $x = 0$ ein globales Maximum vorliegen muss.

2. Aufgabe

11 Punkte

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}; \qquad (b) \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x - \sin x}; \qquad (c) \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\cos n - 2n}{(n+1)^2}.$$

(a) Für $x \to 0$ gilt $1-\cos x \to 0$ und $x^2 \to 0$. Zur Berechnung des Grenzwertes können wir also die Regel von l'Hospital anwenden und erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{\sin x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Bei der letzten Gleichheit haben wir die Stetigkeit des Cosinus ausgenutzt.

(b) Die Funktionen $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \sin x$ und $x \mapsto \cos x$ sind stetig in 0 und es gilt $\cos 0 - \sin 0 \neq 0$. Deswegen gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x - \sin x} = \frac{e^0}{\cos 0 - \sin 0} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

(c) Es gilt

$$a_n = \frac{n^2+\cos n - 2n}{n^2+2n+1} = \frac{n^2(1+\frac{\cos n}{n^2} - \frac{2}{n})}{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{1+\frac{\cos n}{n^2}-\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

Auf die rechte Seite können wir die Grenzwertsätze für Folgen anwenden, denn es gilt

- $\frac{1}{n^2}$, $\frac{2}{n}$ konvergieren gegen 0;
- $\frac{\cos n}{n^2} \to 0$, denn $0 \leq |\frac{\cos n}{n^2}| \leq \frac{1}{n} \to 0$;
- Der Nennner konvergiert gegen 1.

Insgesamt gilt

$$a_n \to \frac{1}{1} = 1.$$

3. Aufgabe

12 Punkte

a) Skizzieren Sie den Graphen der 2-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f(t) = |t|$ für $-1 < t \leq 1$ definiert ist und entscheiden Sie anhand der Skizze, ob f gerade oder ungerade ist.

b) Berechnen Sie die Koeffizienten a_k und b_k $(k \geq 0)$ der reellen Fourierreihe der Funktion f.

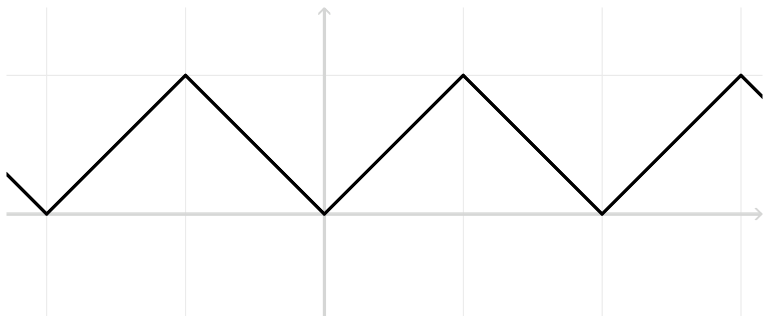

Abbildung 1: Graph der 2-periodischen Funktion f

a) Man sieht, dass die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist und damit gerade.

b) Da f gerade ist, gilt für die Koeffizienten $b_k = 0$.

$a_0 = 2\int_0^1 t dt = 2\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$

Die a_k für $k \neq 0$ berechnet man mit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ durch einmalige partielle Integration aus:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt \\
&= 2\int_0^1 t\cos(k\pi t)dt \\
&= 2(\left[\frac{t}{k\pi}\cdot\sin(k\pi t)\right] - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi t)dt) \\
&= \frac{2}{(k\pi)^2}\left[\cos(k\pi t)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{(k\pi)^2}(\cos(k\pi) - \cos 0) \\
&= \begin{cases} 0, k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{(k\pi)^2}, k \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}
$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie an welchen Stellen f

(a) stetig (b) differenzierbar ist.

---

a) Die Funktion ist für alle $x \neq 0$ stetig, da sie aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist.

Auch an der Stelle $x = 0$ ist f stetig, denn es gilt: $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, weil $0 \leq |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$ (die sin-Funktion ist beschränkt) und $\lim_{x\to 0} 0 = 0 = \lim_{x\to 0} |x|$.

b) Die Funktion ist für alle $x \neq 0$ differenzierbar, da sie aus differenzierbaren Funktionen zusammengesetzt ist. An der Stelle $x = 0$ ist f nicht differenzierbar, denn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ existiert nicht.

(Wählt man z.B. $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}n}$, so hat die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mehrere Häufungspunkte.)

5. Aufgabe

10 Punkte

Sei $y(x)$ eine Funktion mit $y(0) = 1$, die die Differentialgleichung $y'(x) - 2xy(x) = 2x^2 - 1$ erfüllt. Bestimmen Sie das 3-te Taylorpolynom von $y(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Es ist $T_3(x) = \sum\limits_{k=0}^{3} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Es ist $y(0) = 1$ und $y'(0) = 2 \cdot 0^2 - 1 + 2 \cdot 0 \cdot y(0) = -1$.

Es ist $y''(x) = 2y(x) + 2xy'(x) + 4x$ und damit $y''(0) = 2$.

Es ist $y'''(x) = 2y'(x) + 2y'(x) + 2xy''(x) + 4$ und damit $y'''(0) = -2 - 2 + 4 = 0$.

Damit ist $T_3(x) = 1 - x + x^2$.

6. Aufgabe

13 Punkte

a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig bzw. falsch sind. Geben Sie bei den falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an. Ansonsten muss hier keine weitere Begründung geliefert werden.

i) Ist $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0$, so ist f die Nullfunktion.

ii) Für integrierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\int f + g \, \mathrm{d}x = \int f \, \mathrm{d}x + \int g \, \mathrm{d}x$.

iii) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ *nicht* differenzierbar an der Stelle x_0, so besitzt f in x_0 *kein* lokales Extremum.

iv) Alle differenzierbaren Funktionen sind stetig.

v) Es gibt beschränkte Folgen, die nicht monoton sind und dennoch konvergent.

b) Begründen Sie, dass jedes Polynom mit reellen Koeffizienten vom Grad 7 mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

c) Geben Sie ein (komplexes) Polynom vom Grad 7 an, das keine reelle Nullstelle besitzt.

---

a) i) falsch. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

ii) richtig

iii) falsch. $f(x) = |x|$

iv) richtig

v) richtig

b) Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat ein Polynom 7. Grades über $\mathbb{C}$ genau 7 komplexe Nullstellen. Komplexe Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten treten aber immer in komplex konjugierten Paaren auf und somit ist die Anzahl der echt komplexen Nullstellen eine Polynoms 7. Grades gerade. Somit muss mindestens eine der Nullstellen reell sein.

Andere Möglichkeit: Man kann sich überlegen, dass, falls p ein Polynom 7. Grades ist, gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$. Also existiert $a < 0$ mit $p(a) < 0$ und $b > 0$ mit $p(b) > 0$. Da p stetig ist kann man nun den Zwischenwertsatz anwenden, so dass die Existenz eines $\xi \in [a, b]$ mit $p(\xi) = 0$ folgt.

c) $p(x) = (x - i)^7$