Technische Universität Berlin **WiSe 16/17**
Fakultät II – Institut für Mathematik **10. April 2017**
Doz.: Fackeldey, Penn-Karras, Yanchuk

Modulprüfung
„Analysis I für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handgeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4-Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden! Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte!

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe **(12 Punkte)**

(a) Berechnen Sie den Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n+3n^2}.$$

(b) Leiten Sie die folgenden Funktionen ab. Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante.
$$f(x) := \ln(x\, e^a), \qquad g(x) := (x^2+2x+4)\sin(x)$$

(c) Berechnen Sie $z_1 z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ für $z_1 := 1+3i$ und $z_2 := 1+i$. Geben Sie das Ergebnis jeweils in der Form $a+bi$ an.

(d) Geben Sie sowohl den Ansatz der reellen als auch den Ansatz der komplexen Partialbruchzerlegung für die Funktion
$$h(x) := \frac{3x}{(x+1)(x-4)^2(x^2+4)}$$
an. Die Koeffizienten müssen dabei **nicht** bestimmt werden.

2. Aufgabe **(8 Punkte)**

Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) := \begin{cases} \frac{1+\cos(\pi x)}{x-1} & x \neq 1, \\ 0 & x = 1 \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich stetig ist.

(b) Untersuchen Sie, ob die Funktion an der Stelle $x=1$ auch differenzierbar ist und geben Sie in diesem Fall die Ableitung $f'(1)$ an.

3. Aufgabe **(10 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie alle **komplexen** Lösungen der Gleichung $z^4 = -25$.

(b) Finden Sie alle **reellen** Lösungen der Ungleichung $|x-\pi| \leq 2x$.

(c) Finden Sie alle **reellen** Lösungen der Gleichung $1 + 2\ln(x^{1/3}) = \ln(\sqrt[3]{x^5})$.

4. Aufgabe **(10 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:
$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x.$$

5. Aufgabe **(11 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f\colon]-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}[\to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := 1 + \sin(x^2)$.

(a) Berechnen Sie das Bild von f, d.h. $f(]-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}[)$.

(b) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f.

zur Kontrolle: $f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$

(c) Finden Sie alle lokalen Minimal- und Maximalstellen.

(d) Bestimmen Sie das Taylorpolynom T_2 zweiten Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

6. Aufgabe **(9 Punkte)**

(a) Zeigen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2+k} = \frac{2n}{n+1}.$$

(b) Wenden Sie den Mittelwertsatz auf die Funktion $\ln(x)$ an, um zu zeigen, dass $\ln(15) \leq 14$.

Gesamtpunktzahl: 60 Punkte