1. Aufgabe (9 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

a) Berechnen Sie die normierte Zeilenstufenform der Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \end{bmatrix}$.

normierte Zeilenstufenform: $\begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix}$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des reellen linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 77 \\ 13 \\ 69 \end{bmatrix}.$$

$\mathbb{L} =$

c) Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ hat die normierte Zeilenstufenform $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$ und $\dim(\mathrm{Kern}(A))$:

Basis:

Dimension:

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$ und $\dim(\mathrm{Bild}(A))$:

Basis:

Dimension:

Lösung.

a) [3 Punkte]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{(3 Punkte)}$$

Je 1 Punkt, falls die Spalten 2, 3 und 4 richtig sind, und -1 Punkt, falls die erste Spalte falsch ist. Mindestens 0 Punkte.

b) [2 Punkte]

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 77 \\ 13 \\ 0 \\ 69 \end{bmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{(2 Punkte)}$$

Je 1 Punkt für die spezielle und die homogene Lösung. Mengenschreibweise ist zulässig.

c) [4 Punkte]

Basis von $\operatorname{Kern}(A)$**:** $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ (1 Punkt)

Dimension von $\operatorname{Kern}(A)$**:** 1 (1 Punkt)

Basis von $\operatorname{Bild}(A)$**:** $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ (1 Punkt)

Dimension von $\operatorname{Bild}(A)$**:** 3 (1 Punkt)

$\square$

2. Aufgabe (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen z der Gleichung $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$.

b) Berechnen Sie alle reellen Lösungen x der Gleichung $\sin(2x) = \cos(x)$.

Lösung. a) [3 Punkte] Sei $w = 1 + i\sqrt{3}$. Der Betrag von w ist

$$|w| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2.\text{(1 Punkt)}$$

Da der Imaginärteil von w positiv ist, ist ein Argument φ von w gegeben durch

$$\varphi = \arccos(1/2) = \frac{\pi}{3}.\text{(1 Punkt)}$$

Daher finden wir die Eulerdarstellung $w = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. (1 Punkt) Die Lösung der Gleichung sind dann $\sqrt[3]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k = 0, 1, 2$, bzw. $\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{9}}$, $\sqrt[3]{2}e^{i\frac{7\pi}{9}}$, $\sqrt[3]{2}e^{i\frac{13\pi}{9}}$. (1 Punkt)

b) [4 Punkte] Durch Anwendung eines Additionstheorems bzw. Doppelwinkeltheorems ergibt sich die äquivalente Gleichung

$$2\sin(x)\cos(x) = \cos(x).\text{(1 Punkt)}$$

Subtraktion von $\cos(x)$ und Ausklammern liefert die äquivalente Form

$$\cos(x)(2\sin(x) - 1) = 0. \text{ Alternativ 1 Punkt für diese Gleichung.}$$

Ein Produkt ist Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.

Die Lösungsmenge von $\cos(x) = 0$ ist $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$. (1 Punkt)

Die Lösungsmenge von $2\sin(x) - 1 = 0$ bzw. $\sin(x) = \frac{1}{2}$ ist $\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$. (1 Punkt)

Damit ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.\text{(1 Punkt)}$$

□

3. Aufgabe (3 Punkte)

Geben Sie den Ansatz für die reelle sowie die komplexe Partialbruchzerlegung von

$$\frac{x^2+4}{(x-3)(x+1)^2(x^2+1)}$$

an.

Lösung. x^2+1 hat die Nullstellen i und $-i$. Das Nennerpolynom zerfällt daher in die komplexen Linearfaktoren $(x-3)(x+1)^2(x-i)(x+i)$ (1 Punkt) und der Ansatz für die komplexe Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{x^2+4}{(x-3)(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x-i} + \frac{E}{x+i}$$

mit $A, B, C, D, E \in \mathbb{C}$. (1 Punkt) Für die reelle Partialbruchzerlegung fassen wir die komplexen Linearfaktoren wieder zusammen:

$$\frac{x^2+4}{(x-3)(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A'}{x-3} + \frac{B'}{x+1} + \frac{C'}{(x+1)^2} + \frac{D'x+E'}{x^2+1}$$

mit $A', B', C', D', E' \in \mathbb{R}$ (1 Punkt).

Je $-\frac{1}{2}$ Punkt, falls die Koeffizienten keinem Zahlbereich zugeordnet werden, der Term mit Nennerpolynom $(x+1)^2$ vergessen wird, oder statt des Zählerpolynoms $D'x+E'$ ein konstantes Polynom geschrieben wird. □

4. Aufgabe (7 Punkte)

Gegeben sei die Menge $T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} : a - c = 0 \right\}$.

a) Zeigen Sie, dass T ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in T$ linear unabhängig sind.

c) T ist dreidimensional. Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A \right\}$ eine Basis von T ist.

Lösung. a) [3 Punkte]

- Da $0 - 0 = 0$, ist $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in T$. (1 Punkt)
- Seien $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in T$. Dann gelten $a_1 - c_1 = 0$, $a_2 - c_2 = 0$, und daher für die Summe der Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

  $(a_1 + a_2) - (c_1 + c_2) = (a_1 - c_1) + (a_2 - c_2) = 0$. Also $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in T$. (1 Punkt)
- Seien $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in T$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $a - c = 0$ und für das λ-fache der Matrix

$$\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$$

  ist $\lambda a - \lambda c = \lambda(a - c) = 0$ und somit $\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in T$. (1 Punkt)

b) [1 Punkt] Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Es ist $\alpha_2 + \alpha_1 = 0 = \alpha_2 - \alpha_1$, woraus $\alpha_1 = 0$ und somit auch $\alpha_2 = 0$ folgt. Damit sind die Matrizen linear unabhängig. (1 Punkt)

c) [3 Punkte] Da T dreidimensional ist, genügt es, dass $A \in T$ (1 Punkt) und

$$A \notin \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} =: \tilde{T}. \text{(1 Punkt)}$$

Diese Eigenschaften werden offensichtlich von $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ erfüllt, da für Matrizen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ in $\tilde{T}$ gilt, dass $b = d$. (1 Punkt)

Alternativ: Da T dreidimensional ist, genügt es, dass $A \in T$ (1 Punkt) und $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, A linear unabhängig sind. (1 Punkt) Diese Eigenschaften werden offensichtlich von $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ erfüllt, da für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ aus

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix}$$

wie oben folgt, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (siehe Einträge zweite Zeile) und damit auch $\alpha_3 = 0$. (1 Punkt)

$\square$

5. Aufgabe (5 Punkte)

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & -\alpha \\ -2 & \alpha & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ invertierbar?

Lösung. Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang hat bzw. sie eine Zeilenstufenform ohne Nullzeilen hat. (1 Punkt) Anwendung des Gauß-Algorithmus liefert

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & -\alpha \\ -2 & \alpha & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{bmatrix} -2 & \alpha & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & -\alpha \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{II \leftrightarrow III} \begin{bmatrix} -2 & \alpha & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & -\alpha \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[IV+2II]{III+4II} \begin{bmatrix} -2 & \alpha & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 4-\alpha \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{III \leftrightarrow IV} \begin{bmatrix} -2 & \alpha & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 4-\alpha \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV-2III} \begin{bmatrix} -2 & \alpha & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha \end{bmatrix} \text{(3 Punkte)}$$

Je 1 Punkt für eine richtig eliminierte Spalte unabhängig von der Vorgehensweise.

Die letzte Zeile ist genau dann eine Nullzeile, falls $\alpha = 2$, also ist C genau dann invertierbar, wenn $\alpha \neq 2$. (1 Punkt) $\square$

6. Aufgabe (8 Punkte)

Gegeben sei die Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2,$$
$$ax + b \mapsto \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+b \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass F eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(F)$.

c) Ist F invertierbar? Falls ja, bestimmen Sie die Umkehrabbildung F^{-1}.

Lösung. a) [2 Punkte]

- Seien $a_1x + b_1, a_2x + b_2 \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} F(a_1x + b_1) + F(a_2x + b_2) &= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ 2a_1 + b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 + b_2 \\ 2a_2 + b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ 2(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \end{bmatrix} \\ &= F((a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)).\text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

- Seien $ax + b \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda F(ax + b) &= \lambda \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a + \lambda b \\ 2\lambda a + \lambda b \end{bmatrix} \\ &= F(\lambda a x + \lambda b) \\ &= F(\lambda(ax + b)).\text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

b) [2 Punkte] Ein Polynom $ax + b \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ liegt im Kern von F genau dann, wenn

$$\vec{0} = F(ax + b) = \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+b \end{bmatrix}.\text{(1 Punkt)}$$

Aus $a + b = 0$ folgt $b = -a$. Damit gilt $0 = 2a + b = a$ und somit auch $b = -a = 0$. D.h.

$$\mathrm{Kern}(F) = \{0\}.\text{(1 Punkt)}$$

c) [4 Punkte] Da $\mathrm{Kern}(F) = \{0\}$, ist F injektiv. (1 Punkt) Wegen $\dim(\mathbb{R}_{\leq 1}[x]) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ und der Dimensionsformel für lineare Abbildungen, ist F auch surjektiv und damit bijektiv. (1 Punkt) Betrachte die $F^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$. Wir wählen den Ansatz

$$F^{-1}\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = sx + t$$

mit noch zu bestimmenden reellen Zahlen $s, t \in \mathbb{R}$. Wir wollen $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ in der Form $\begin{bmatrix} a+b \\ 2a+b \end{bmatrix}$ darstellen und müssen dazu $a + b = c$, $2a + b = d$ nach a, b lösen. (1 Punkt) Mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & c \\ 2 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow{II-I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & d-c \end{array}\right],$$

d.h. $a = d - c$ und $b = c - a = 2c - d$. Mit dieser Darstellung erhalten wir

$$\begin{aligned} sx + t &= F^{-1}\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) \\ &= F^{-1}\left(\begin{bmatrix} (d-c) + (2c-d) \\ 2(d-c) + (2c-d) \end{bmatrix}\right) \\ &= F^{-1}(F((d-c)x + (2c-d)) \\ &= (d-c)x + (2c-d), \end{aligned}$$

also $F^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$, $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \mapsto (d-c)x + (2c-d)$. (1 Punkt)

$\square$

7. Aufgabe (8 Punkte)

Gegeben seien der Vektorraum $V = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_2 \end{bmatrix} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$ sowie die zwei Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ von V mit

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Weiterhin sei $L_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}$ die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $L\colon V \to V$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$ mit

$$L_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $\mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ mithilfe von $\mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

Lösung. a) [3 Punkte] Wir bestimmen $\mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ spaltenweise via

$$\mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}\vec{e}_1 = K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}_2}\left(-2\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \text{(1 Punkt)}$$

$$\mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}\vec{e}_2 = K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{(1 Punkt)}$$

$$\mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}\vec{e}_3 = K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{(1 Punkt)}$$

$$\text{d.h. } \mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) [5 Punkte] Es gilt

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1} &= \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} L_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} \\ &= \mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}^{-1} L_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}. \end{aligned} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Die Matrix $\mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}^{-1}$ berechnet man mit Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{I+II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{(1 Punkt)}$$

$$\xrightarrow[II+III]{I+III} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{(1 Punkt)}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}I} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{(1 Punkt)}$$

Je 1 Punkt für richtig eliminierte Spalten.

Damit folgt

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1} &= \mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}^{-1} L_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} . \text{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

$\square$

8. Aufgabe (8 Punkte)

a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Zahlenfolgen

$$a_n = \frac{n^2 - 4}{2n^2 + 10n + 8}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$b_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

b) Es sei q eine reelle Zahl mit $0 < q < 1$. Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $c_0 = 0$, $c_{n+1} = qc_n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

i) Zeigen Sie, dass $c_n < \frac{1}{1-q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) Untersuchen Sie c_n auf Monotonie und Konvergenz und berechnen Sie ggf. den Grenzwert von c_n.

Lösung.

a) [3 Punkte] $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4}{2n^2+10n+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{4}{n^2}}{2+\frac{10}{n}+\frac{8}{n^2}} = \frac{1-0}{2+0+0} = \frac{1}{2}$. (1 Punkt)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}\right) \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1}} \qquad \text{(1 Punkt)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}{1 + \sqrt{\frac{n-1}{n}}} \\
&= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \text{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

b) [5 Punkte]

i) **Induktionsanfang:** Wegen $q < 1$ ist $1 - q > 0$ und folglich $\frac{1}{1-q} > 0 = c_0$. (1 Punkt)

Induktionsvoraussetzung: $c_n < \frac{1}{1-q}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Da $q > 0$, gilt

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= qc_n + 1 \\
&< q\frac{1}{1-q} + 1 \\
&= \frac{q+1-q}{1-q} = \frac{1}{1-q}. \text{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

Je $-\frac{1}{2}$ Punkt, wenn nicht kenntlich ist, wo $q > 0$ bzw. $q < 1$ gebraucht werden.

ii) Es gilt nach i)

$$c_{n+1} - c_n = qc_n + 1 - c_n = 1 - (1-q)c_n > 0 \text{(1 Punkt)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist c_n monoton wachsend. Da c_n monoton wachsend und beschränkt ist ($c_0 \leq c_n < \frac{1}{1-q}$), folgt, dass c_n konvergent ist. (1 Punkt) Es sei $c \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von c_n. Dann gilt

$$c = \lim_{n\to\infty} c_{n+1} = \lim_{n\to\infty} qc_n + 1 = qc + 1.$$

Das heißt $c - qc = 1$ bzw. $c = \frac{1}{1-q}$. (1 Punkt)

$\square$

9. Aufgabe (5 Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ als

$$f(x) = \begin{cases} \sin(ax), & x < 0, \\ (x-1)^2 + b & x \geq 0. \end{cases}$$

Für welche Parameter ist f stetig in 0?

b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

i) Ist $|f|$ eine stetige Funktion, so ist auch f eine stetige Funktion.

ii) Ist $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so besitzt f ein globales Maximum oder Minimum.

iii) Jedes reelle Polynom vom Grad 5 besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

Lösung.

a) [2 Punkte] Wir betrachten sowohl den linksseitigen als auch den rechtsseitigen Grenzwert von f in 0. Da sowohl $\sin(ax)$ als Verkettung stetiger Funktionen als auch $(x-1)^2 + b$ als Polynom stetige Funktionen sind, (1 Punkt) gilt

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \sin(ax) = \sin(a \cdot 0) = 0,$$
$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (x-1)^2 + b = (-1)^2 + b = 1 + b,$$

d.h. der Grenzwert von f in 0 existiert genau dann, wenn $b = -1$ ($a \in \mathbb{R}$ beliebig) (1 Punkt) und in dem Fall ist $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, d.h. f ist stetig in 0.

$-\frac{1}{2}$ Punkt, falls zum Parameter a keine Aussage getroffen wird aber die für b richtig ist.

b) [3 Punkte]

i) Nein, denn $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$, ist nicht stetig, aber $|f(x)| = 1$ ist eine stetige Funktion. (1 Punkt)

ii) Nein, denn $f\colon]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, besitzt weder ein Maximum, noch ein Minimum, denn es gilt $\mathrm{Bild}(f) =]-1, 1[$. (1 Punkt)

iii) **1. Möglichkeit:** Ja, denn ein solches Polynom hat genau 5 komplexe Nullstellen (mit Vielfachheiten), aber die nicht-reellen Nullstellen treten in Paaren komplex-konjugierter Zahlen auf, also hat das Polynom 0, 2 oder 4 nicht-reelle Nullstellen respektive 5, 3 oder 1 reelle Nullstelle. (1 Punkt)

2. Möglichkeit: Ja, denn für $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, $a \neq 0$, gilt

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ -\infty, & a < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty, & a > 0, \\ +\infty, & a < 0. \end{cases}$$

In jedem Fall hat p nach dem Zwischenwertsatz eine reelle Nullstelle. (1 Punkt)

Richtige Antworten ohne Begründungen bringen keine Punkte.

□

Punkte	Note
0–29	5,0
30–32	4,0
33–35	3,7
36–38	3,3
39–41	3,0
42–44	2,7
45–47	2,3
48–50	2,0
51–53	1,7
54–56	1,3
57–60	1,0