TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 01
Institut f"ur Mathematik Stand: 24. Juli 2001
Ferus/Frank/Krumke
König/Leschke/Peters/ v. Renesse

Lösungen zur Klausur vom 23.7.2001 (Rechenteil) Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f partiell differenzierbar als Komposition partiell differenzierbarer Abbildungen mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2x^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Für $(x, y) = (0, 0)$ ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1.$$

2. Aufgabe (7 Punkte)

Da

$$\mathrm{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y-2) \end{pmatrix},$$

ist $(0, 2)$ ein kritischer Punkt.

Untersuche noch f auf dem Rand, d.h. wir haben eine Extremwertaufgabe mit der Nebenbedigung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$.

Dabei ist

$$\mathrm{grad}_{(x,y)} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Da grad $g \neq 0$ auf dem Rand von B, untersuchen wir

$$\mathrm{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y-2) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \; \mathrm{grad}_{(x,y)} g, \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zusammen mit der Nebenbedingung haben wir also drei Gleichungen für x, y, λ:

$$x = \lambda x,\ \ y - 2 = \lambda y,\ \ x^2 + y^2 - 9 = 0.$$

Das ergibt $(1-\lambda)x = 0$, also $\lambda = 1$ oder $x = 0$. Aus der zweiten Gleichung sehen wir, daß $\lambda = 1$ nicht möglich ist, also ergibt die dritte Gleichung $y = \pm 3$. Die kritischen Punkte sind also $\pm(0,3), (0,2)$.

Da B kompakt und f stetig ist, werden Minimum und Maximum angenommen.

Ein Vergleich der Funktionswerte $f(0,2) = 0, f(0,3) = 1, f(0,-3) = 25$ liefert, daß in $(0,-3)$ das Maximum vorliegt, in $(0,2)$ das Minimum.

3. Aufgabe (7 Punkte)

Parametrisierung der Kugeloberfläche mit Kugelkoordinaten

$$\vec{x}(\theta,\phi) = (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta),\ \ 0 \le \phi \le 2\pi,\ \ 0 \le \theta \le \pi.$$

Der Normalenvektor berechnet sich durch

$$\vec{n}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\cos\theta \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\phi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\phi \\ r^2\sin^2\theta\sin\phi \\ r^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

und damit

$$dO = r^2\sin\theta d\theta d\phi.$$

Damit

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\partial B} f\ dO &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^4\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\phi \\ &= -\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}r^4\cos^3\theta\Big|_{\theta=0}^{\pi}d\phi \\ &= \frac{4\pi r^4}{3} \end{aligned}$$