TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 01
Institut f'ur Mathematik Stand: 24. Juli 2001
Ferus/Frank/Krumke
König/Leschke/Peters/ v. Renesse

Lösungen zur Klausur vom 23.7.2001 (Verständnisteil) Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

a) (2 Punkte)
D ist (beschränkt und abgeschlossen, also) kompakt. Weiter ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig auf D.

Also nimmt f auf D sein Maximum und Minimum an.

b) (3 Punkte)
D ist nicht kompakt, also kann man den Satz über stetige Funktionen auf kompakten Bereichen nicht anwenden!
Aber da für alle $(x, y) \in D$: $f \geq 0$ ist, nimmt f sein Minimum in $(x, y) = (0, 0)$ an.
Da $\lim_{x\to\pm\infty} f(x, x) = \infty$, nimmt die Funktion auf D ihr Maximum nicht an.

2. Aufgabe (5 Punkte)

1. Möglichkeit:
Da $\vec{f}$ linear ist, entspricht das Differential der Funktion $\vec{f}$, d.h. es gilt $\vec{f}'(\vec{x_0})(\vec{v}) = 2\vec{v}$.
2. Möglichkeit:
Das Differential kann auch zu Fuß berechnet werden:

$$\vec{f}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \Rightarrow \vec{f}'(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{f}'(\vec{x_0})(v_1, v_2, v_3) = (2v_1, 2v_2, 2v_3)$$

3. Aufgabe (5 Punkte)

1. Möglichkeit:
Da $-f$ das Potential zum Vektorfeld $\vec{v} = \text{grad} f$ ist, kann das Integral direkt berechnet werden als Potentialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve.

$$\int_\gamma \text{grad} f = -f(0, 0, 0) + f(1, 2, 3) = 12$$

2. Möglichkeit:
Das Integral kann auch zu Fuß entlang eines beliebig gewählten Weges ausgerechnet werden. Dabei ist das Integral wegunabhängig, da grad$f$ ein Potentialfeld ist.
Wähle z.B. den direkten Weg $\gamma(t) = t(1,2,3), t \in [0,1]$.
Dann gilt mit grad$f = (2yz, 2xz, 2xy)$:
$\int_\gamma \text{grad} f \, \vec{ds} = \int_0^1 < \begin{pmatrix} 12t^2 \\ 6t^2 \\ 4t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} > dt = 3 \int_0^1 12t^2 \, dt = 12$

4. Aufgabe (5 Punkte)

Nach dem Satz von Gauß gilt:

$$\iiint\limits_Z \text{div } \vec{v} \, dx \, dy \, dz = \iint\limits_{\partial Z} \vec{v} \, d\vec{O}.$$

Es gilt div $\vec{v} = 1$ und damit

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\partial Z} \vec{v} \, d\vec{O} &= \iiint\limits_Z 1 \, dx \, dy \, dz \\ &= \int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{2} 1r \, dr \, d\phi \, dz \\ &= 16\pi \end{aligned}$$