TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 01
Institut für Mathematik Stand: 24. Oktober 2001
Ferus/Frank/Krumke
König/Leschke/Peters/ v. Renesse

Lösungen zur Klausur vom 8.10.2001 (Rechenteil)
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Die Funktion f ist in $(0,0)$ stetig, da

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}} = 0 = f(0,0)$$

(oder aus $0 \le f(x,y) \le x^2$ folgt $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)) = 0$
oder aus $f(r\cos\phi, r\sin\phi) = r^2\cos^2\phi\sin^2\phi$ folgt $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)) = 0$).
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, denn

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Sei $(x,y) \neq 0$, dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - x^2y^2 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$, da

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

2. Aufgabe (7 Punkte)

Da

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2(x+1) \\ 2y \end{pmatrix}$$

ist, ist $(-1,0)$ ein kritischer Punkt im Inneren von B.
Untersuche noch f auf dem Rand, d.h. wir haben eine Extremwertaufgabe mit der Nebenbedigung $g(x,y) = x^2+y^2-9 = 0$.
Es ist

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Da $\operatorname{grad} g \neq 0$ auf dem Rand von B, untersuchen wir

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2(x+1) \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \operatorname{grad}_{(x,y)} g, \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zusammen mit der Nebenbedingung haben wir also drei Gleichungen für x, y und λ:

$$(x+1) = \lambda x,\ y = \lambda y,\ x^2 + y^2 - 9 = 0.$$

Die zweite Gleichung ergibt $(1-\lambda)y = 0$, also $\lambda = 1$ oder $y = 0$. Aus der ersten Gleichung sehen wir, dass $\lambda = 1$ nicht möglich ist. Also ergibt die dritte Gleichung $x = \pm 3$. Mit $\lambda = \frac{3 \pm 1}{3}$ werden alle 3 Gleichungen gelöst. Die kritischen Punkte sind also $(\pm 3, 0)$ und $(-1, 0)$.
Da B kompakt und f stetig ist, werden Minimum und Maximum angenommen.
Ein Vergleich der Funktionswerte $f(-1,0) = 0, f(3,0) = 16, f(-3,0) = 4$ liefert, daß in $(3,0)$ das Maximum und in $(-1,0)$ das Minimum von f auf B vorliegt.

3. Aufgabe (7 Punkte)

In Zylinderkoordinaten ist

$$T = \left\{ (\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq z \leq 2, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

und $x^2 + y^2 = \rho^2$.
Also

$$\iiint\limits_T x^2 + y^2 \, dV = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho^3 dz d\phi d\rho = \pi \left[\tfrac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 = 4\pi$$