TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II - Mathematik
Lutz
Schwartz

WS 2001/2002
Stand: 25. Februar 2002

Lösungen zur Klausur vom 18.02.2002 (Rechenteil)
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (11 Punkte)

a) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f als Komposition stetiger Abbildungen stetig. Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{x^3 y}{x^2+y^2}\right| &\leq \left|\frac{x^3 y}{x^2}\right| \qquad \text{da } y^2 \geq 0 \\ &= |xy|\,. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f als Komposition partiell differenzierbarer Abbildungen partiell differenzierbar und es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3\cdot(x^2+y^2) - x^3y\cdot(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ebenfalls existiert die partielle Ableitung im Punkt $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

2. Aufgabe (14 Punkte)

Bedingung für kritische Punkte: $\mathrm{grad}_{(x,y)} f = 0$, d.h.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3(x-1)^2 + 6(x-1) - y^2 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2xy = 0. \end{cases}$$

Aus der 2. Gleichung ergibt sich $x = 0$ oder $y = 0$.

Sei $x = 0$. Aus der 1. Gleichung folgt dann

$$3 \;-\; 6 \;-\; y^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2 = -3.$$

Da diese Gleichung keine reellen Lösungen hat, gibt es keine kritischen Punkte mit $x = 0$.

Sei $y = 0$. Aus der 1. Gleichung folgt dann

$$3(x-1)^2 + 6(x-1) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = 1.$$

Also besitzt f (nur) die beiden kritischen Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$.

Die Hessematrix von f ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}.$$

Für beide kritischen Punkte ist die Determinante der Hessematrix

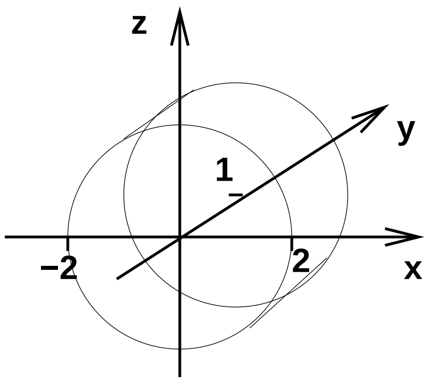
$$\det \mathrm{Hess} = -12x^2 < 0,$$

also gibt es keine lokalen Extrema.

Da f auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist, müssen Randpunkte nicht berücksichtigt werden und f hat auch keine globalen Extrema.

3. Aufgabe (15 Punkte)

Skizze:



Es gilt

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{\partial B} f\ dO \quad &= \quad \iint\limits_{\text{Boden}} f\ dO \ + \iint\limits_{\text{Deckel}} f\ dO \ + \iint\limits_{\text{Mantel}} f\ dO \\
&= \quad \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2\pi} (3 \cdot \rho \cos\varphi)\ \rho\ d\varphi d\rho & \text{(Boden)} \\
&\qquad + \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2\pi} (6 \cdot 1^2 + 3 \cdot \rho \cos\varphi)\ \rho\ d\varphi d\rho & \text{(Deckel)} \\
&\qquad + \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (6y^2 + 3 \cdot 2 \cos\varphi)\ 2\ d\varphi dy & \text{(Mantel)} \\
&= \quad \int\limits_0^2 \left[3\rho^2 \sin\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\ d\rho & \text{(Boden)} \\
&\qquad + \int\limits_0^2 2\pi \cdot 6 \cdot \rho\ d\rho & \text{(Deckel)} \\
&\qquad + \int\limits_0^1 2\pi \cdot 6y^2 \cdot 2\ dy & \text{(Mantel)} \\
&= \quad \left[6\pi\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=2} + \left[8\pi y^3\right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \quad 24\pi \ + \ 8\pi \ = \ 32\pi.
\end{aligned}
$$