Lösungen des Rechenteils

1. Aufgabe

19 Punkte

Da D kompakt und f stetig ist, nimmt f auf D sein Maximum und sein Minimum an $\boxed{\text{1 Punkt}}$. Also muss man im Inneren von D nur die kritischen Werte berechnen und mit den anderen Funktionswerten der kritischen Punkte aus der Nebenbedingung vergleichen!
Im Innern gilt:

$$\operatorname{grad} f(x,y) \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 4y+2 \end{pmatrix} \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Also ist $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ein kritischer Punkt.

Um den Rand der Ellipse D zu untersuchen benutzen wir die Lagrangemultiplikatoren. Die Nebenbedingung ist gegeben durch $g(x,y) := \frac{x^2}{2} + y^2 - 3 = 0$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$.
Als erstes betrachtet man die Punkte mit

$$\operatorname{grad} g(x,y) \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow (x,y) \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} (0,0)$$

Da aber $g(0,0) \neq 0$ gilt, ist dieser Punkt für uns nicht relevant! $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Nun berechnen wir die Punkte mit $\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$, es ergeben sich drei Gleichungen:

$$2x-1 \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \lambda x \;,\; 4y+2 \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \lambda 2y \;,\; \frac{x^2}{2} + y^2 - 3 = 0.$$

Durch Auflösen der ersten beiden Gleichungen nach x bzw. y erhält man $x = \frac{1}{2-\lambda}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$, $y = \frac{-1}{2-\lambda}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$. Die dritte Gleichung ergibt damit $\lambda = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$. Also erhalten wir die kritischen Werte $(x,y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$ und $(x,y) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$.
Alternative Rechnung: $\boxed{\text{5 Punkte}}$

Der Vergleich der Funktionswerte zeigt, dass $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} 9 + 3\sqrt{2} > f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} 9 - 3\sqrt{2} > f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \frac{9}{4}$ ist und somit liegt bei $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ das Maximunm und bei $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ das Minimum von f auf D $\boxed{\text{1 Punkt Schlussfolgerung}}$.

2. Aufgabe

9 Punkte

Es bieten sich Zylinderkoordinaten für die Lösung an:

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,\mathrm{dV} \overset{\boxed{\text{3 +2 Punkte für Grenzen und r}}}{=} \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^{42} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi), h)\, r\ \mathrm{dh}\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{dr}$$

$$\overset{\boxed{\text{1 Punkt fürs Einsetzen}}}{=} \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^{42} \frac{e^{-h}}{r^4}\, r\ \mathrm{dh}\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{dr}$$

$$\overset{\boxed{\text{1 Punkt Integration } \phi}}{=} 2\pi \int_0^{42} e^{-h} \int_1^2 \frac{1}{r^3}\ \mathrm{dr}\ \mathrm{dh}$$

$$\overset{\boxed{\text{1 Punkt Integration } r}}{=} 2\pi \int_0^{42} e^{-h} \left[\frac{-1}{2r^2}\right]_1^2 \mathrm{dh}$$

$$= \frac{3\pi}{4}\int_0^{42} e^{-h}\mathrm{dh} = \frac{3\pi}{4}\left[-e^{-h}\right]_0^{42}$$

$$\overset{\boxed{\text{1 Punkt Integration } h}}{=} \frac{3\pi}{4}(1-e^{-42})$$

3. Aufgabe

8 Punkte

Die Funktion f ist ungerade, also sind alle a_k null $\boxed{\text{1 Punkt}}$. Die b_k berechnen sich durch:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\sin(kt)\ \mathrm{dt} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin(kt)\ \mathrm{dt}\ \boxed{\text{1 Punkt Einsetzen}} \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\frac{-\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi}\ \boxed{\text{1 Punkt Stammfunktion}} \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{k}\right)\ \boxed{\text{1 Punkt Ausrechnen}} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{8}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}\ \text{(optional)}
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$f \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{8}{2l+1}\sin((2l+1)x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{k}\right)\sin(kx).\quad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

In der Zeichnung nimmt die Fourierreihe an den Sprungstellen von f gerade den Wert $\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = 0 = \frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2}$ an. $\boxed{\text{3 Punkte für beide Skizzen und 'Zwischenpunkte'}}$

4. Aufgabe 4 Punkte

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3x^3+y^3}{x^2+y^2}\right) \boxed{\text{1 Punkt}} \\
&= \frac{9x^2(x^2+y^2)-(3x^3+y^3)2x}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{3x^4+9x^2y^2-2y^3x}{(x^2+y^2)^2} \boxed{\text{1 Punkt}}
\end{aligned}$$

In $(x, y) = (0, 0)$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3h^3+0}{h^2+0}-0}{h} \boxed{\text{1 Punkt}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3h^3}{h^3} \\
&= 3 \boxed{\text{1 Punkt}}
\end{aligned}$$

Also ist die partielle Ableitung gegeben durch:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) := \begin{cases} \frac{3x^4+9x^2y^2-2y^3x}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 3 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$