Lösungen des Verständnisteils

1. Aufgabe

4 Punkte

Eine abgeschlossene, nicht konvexe Menge ist z.B. gegeben durch $M = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$.

$\boxed{\text{2 Punkte: Angabe eines Beispiels durch eine gute Skizze}}$

Die Menge ist abgeschlossen, da der Rand $y = x^2$ mit zur Menge gehört.

$\boxed{\text{1 Punkt: Begründung abgeschossen}}$

Die Menge ist nicht konvex, da die Strecke zwischen den Punkten (2,1) und (-2,1) den Punkt (0,1) enthält, der nicht zu M gehört.

$\boxed{\text{1 Punkt: Begründung nicht konvex}}$

2. Aufgabe

8 Punkte

a) $\vec{v}$ ist bereits als Potentialfeld gegeben. Alternativ verweist man auf die Beziehung rot(grad$f$)=0 oder rechnet notfalls die Potentialbedingung nach. $\boxed{\text{2 Punkte}}$

Ein Potential von $\vec{v}$ ist die Funktion $-f$. Alternativ ist ein allgemeines Potential von der Form $u(x,y,z) = -f(x,y,z) + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

b) Wegen div$\vec{v}$= div(grad$f$)= div(grad$f$) $= \Delta f = 0$ besitzt f ein Vektorpotential, da f eine harmonische Funktion ist. $\boxed{\text{2 Punkte}}$

c) Da $\vec{v}$ die Stammfunktion f besitzt, berechnet man das Kurvenintegral durch

$$\int_{\vec{c}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \overset{\boxed{\text{2 Punkte}}}{=} f(1,1,1) - f(0,0,0) \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} -4 + 7 = 3.$$

3. Aufgabe

11 Punkte

$\boxed{\text{3 Punkte: Skizze mit allen relevanten Grössen}}$

Die Oberfläche von B hat 2 Teile.

1) Ein Teil der Oberfläche wird durch die Bedingungen $-5 \leq -x^2 - y^2 + 4$ und $z = -5$ beschrieben. In Zylinderkoordinaten lauten diese Bedingungen $h = -5$ und $r^2 \leq 9$. Damit erhält man als Parametrisierung

$$\vec{p} : [0,3] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \; \vec{p}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{4 Punkte: Parameterbereiche und Abbildung aus den Bedingungen}}$

2) Der andere Teil der Oberfläche wird durch die Bedingungen $z = -x^2 - y^2 + 4$ und $-5 \leq -x^2 - y^2 + 4$ beschrieben. In Zylinderkoordinaten lauten diese Bedingungen $h = -r^2 + 4$ und $r^2 \leq 9$. Damit erhält man als Parametrisierung

$$\vec{p} : [0,3] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \; \vec{p}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ -r^2 + 4 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{4 Punkte: Parameterbereiche und Abbildung aus den Bedingungen}}$

4. Aufgabe

9 Punkte

Nach dem Integralsatz von Gauss $\boxed{\text{1 Punkt: Idee}}$ gilt:

$$\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O} \overset{\boxed{\text{1 Punkt: Formel}}}{=} \iiint_B \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}V.$$

Die Divergenz berechnet sich als $\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z) = 1 + 1 + 1 = 3$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Für den gegebenen Bereich ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \iiint_B \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}V &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2}\int_{z=0}^{5-y} 3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2} 3(5-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1} \left[3(5y - \frac{1}{2}y^2)\right]_{y=0}^{2} \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} 3(10-2)\,\mathrm{d}x = 24 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{3 Punkte: richtige Grenzen; 3 Punkte: richtiges Ausintegrieren}}$

5. Aufgabe

4 Punkte

Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:
Sei z.B. $f(x,y) = -x^2 + y^2$ und $g(x,y) = x = 0$.

$\boxed{\text{1 Punkt: Angabe von } f \text{ ohne lokale Extrema}}$

$\boxed{\text{1 Punkt: Angabe von } g\text{, so dass } g(x,y)=0 \text{ nicht kompakt ist}}$

Dann besitzt die Funktion f eingeschränkt auf die Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ ein globales Minimum im Punkt (0,0), da $f(x = 0, y) = y^2$ ist.

$\boxed{\text{2 Punkte: Angabe eines Extremums von } f \text{ unter der NB } g(x,y)=0}$

6. Aufgabe

4 Punkte

Der Vektor $\vec{\gamma}'(t)$ ist tangential an die Kurve $\vec{\gamma}$ im Punkt $\vec{\gamma}(t)$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Da $f(\vec{\gamma}(t)) = 1$ ist, so liegt die Kurve $\vec{\gamma}$ in der Niveaumenge von f zum Wert 1. Also ist $\vec{\gamma}'(t)$ tangential an die Niveaumenge von f im Punkt $\vec{\gamma}(t)$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Der Gradient von f steht in jedem Punkt senkrecht auf der Niveaumenge. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Da im Punkt $\vec{\gamma}(t)$ der Gradient $\mathrm{grad} f(\vec{\gamma}(t))$ senkrecht zu Kurve $\vec{\gamma}$ steht und $\vec{\gamma}'(t)$ tangential an $\vec{\gamma}$ ist, so folgt für das Skalarprodukt $\vec{\gamma}'(t) \cdot \mathrm{grad} f(\vec{\gamma}(t)) = 0$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Man kann auch alternativ mit der Kettenregel rechnen:
Aus der Gleichung $1 = f(\vec{\gamma}(t))$ für alle $t \in [a,b]$ folgt durch Ableiten nach t mit der Kettenregel $0 = f'(\vec{\gamma}(t))\vec{\gamma}'(t) = \mathrm{grad} f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)$. $\boxed{\text{4 Punkte}}$