Lösungen des Rechenteils

1. Aufgabe

3 Punkte

Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2(x^2+y^2) - (3x^3+y^3)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 + 3x^2y^2 - 6yx^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Für $(x,y) = (0,0)$ ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

$\boxed{\text{2 Punkte: richtige Formel und Rechnen}}$

2. Aufgabe

9 Punkte

a) Da $\vec{v}$ ein Gradientenfeld ist, gilt $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$, und da der Definitionsbereich konvex ist, existiert eine globale Stammfunktion von $\vec{v}$. $\boxed{\text{2 Punkte}}$
Alternativ kann man auch nach der Berechnung der Stammfunktion feststellen, dass diese auf dem gesamten Definitionsbereich wohldefiniert ist. $\boxed{\text{2 Punkte}}$

Da eine Stammfunktion f mit $\text{grad} f \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \vec{v}$ gesucht ist, muss $\frac{\partial f}{\partial x} = v_1 = z\cos(xz+yz)$ sein. Durch Integration ergibt sich $f(x,y,z) = \sin(xz+yz) + c(y,z)$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$. Dieses f abgeleitet nach y muss v_2 entsprechen, d.h. $z\cos(xz+yz) + \frac{\partial c(y,z)}{\partial y} = z\cos(xz+yz)$, woraus sich ergibt, dass c nicht von y abhängen kann. $\boxed{\text{1 Punkt}}$
Analog muss $(x+y)\cos(xz+yz) + \frac{\partial c(z)}{\partial z} = \frac{1}{z} + (x+y)\cos(xz+yz)$ erfüllt sein. Also ist $c(z) = \ln(z) + c$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$
Damit ergibt sich $f(x,y,z) = \sin(xz+yz) + \ln(z) + c$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$.

b) Da $\vec{v}$ ein Potenzialfeld $\boxed{\text{1 Punkt}}$ ist, ist ein Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve null, also auch das gesuchte Integral über das Quadrat $\boxed{\text{1 Punkt}}$.

3. Aufgabe

14 Punkte

a) Für lokale Extrema muss gelten:

$$\operatorname{grad} f(x,y) \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \begin{pmatrix} 4x(x^2-y^2)+4x(x^2-2) \\ -4y(x^2-y^2)+4y(y^2+2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4x(2x^2-y^2-2) \\ 4y(2y^2-x^2+2) \end{pmatrix} \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da Produkte null sind, wenn mindestens einer der Faktoren null ist, ergeben sich vier Fälle:
1) $x = y = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$
2) $x = 0$ und $2y^2 - x^2 + 2 = 0 \Rightarrow y^2 = -4 \Rightarrow$ keine Lösung $\boxed{\text{1 Punkt}}$
3) $y = 0$ und $2x^2 - y^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \pm 1 \Rightarrow (x,y) = (\pm 1, 0)$ $\boxed{\text{2 Punkte}}$
4) $2y^2 - x^2 + 2 = 0$ und $2x^2 - y^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3}, y^2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow$ keine Lösung $\boxed{\text{1 Punkt}}$
Die Hessematrix von f berechnet man als:

$$\operatorname{Hess} f(x,y) \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \begin{pmatrix} 24x^2 - 4y^2 - 8 & -8xy \\ -8xy & 24y^2 - 4x^2 + 8 \end{pmatrix}$$

Die Determinanten der Hessematrix an den berechneten kritischen Punkten ergeben sich zu:
1) $|\operatorname{Hess} f(0,0)| = -64 < 0$ also liegt bei $(x,y) = (0,0)$ kein Extremum (sondern ein Sattelpunkt) vor. $\boxed{\text{1 Punkt}}$
2) $|\operatorname{Hess} f(1,0)| = 48 > 0$ und $16 > 0$ also liegt bei $(x,y) = (1,0)$ ein lokales Minimum vor. $\boxed{\text{1 Punkt}}$
3) $|\operatorname{Hess} f(-1,0)| = 48 > 0$ und $16 > 0$ also liegt auch bei $(x,y) = (-1,0)$ ein lokales Minimum vor. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

b) Die Funktion f nimmt auf ganz $\mathbb{R}^2$ nur positive Werte an. Zudem ist

$$\lim_{x\to\infty,\, y fest} f(x,y) = \lim_{y\to\infty,\, x fest} f(x,y) = \infty$$

Allgemein gilt $f(x,y) \to \infty$ für $|\binom{x}{y}| \to \infty$, d.h. die Funktionswerte von f werden für $|\binom{x}{y}| \to \infty$ beliebig groß. Also kann die Funktion im Unendlichen (dem "Rand" unseres Definitionsbereiches) keine kleineren Werte annehmen und die lokalen Minima sind auch globale Minima. Globale Maxima existieren nicht, da f beliebig große Werte annehmen kann.
$\boxed{\text{2+1 Punkte für glaubhafte Erklärung für Minimum und Maximum}}$

4. Aufgabe

9 Punkte

Mit der Transformation $x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi), z = z$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$ ergibt sich für das Volumen von B:

$$\iiint_B 1 \text{ dx dy dz} \overset{\boxed{\text{3+1 Punkte: Grenzen und r}}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{(1-r)^2} r \text{ dz dr d}\phi$$

$$\overset{\boxed{\text{1+1 Punkte: pro Integration}}}{=} 2\pi \int_0^1 r(1-r)^2 \text{dr}$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r - 2r^2 + r^3)\text{dr}$$

$$\overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - 2\frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\pi(\frac{1}{12}) \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \frac{\pi}{6}$$

5. Aufgabe

5 Punkte

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f stetig als Komposition stetiger Funktionen $\boxed{\text{1 Punkt}}$. Betrachte $(x, y) = (0, 0)$. Mit $x^2 + y^2 = r^2$ (Polarkoordinaten oder sonstige Substitution) $\boxed{\text{1 Punkt}}$ gilt:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2} - 1}{r^2} \overset{\boxed{\text{1 Punkt: Anwendung l'Hospital}}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{2re^{r^2}}{2r} \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} 1.$$

Mit $f(0, 0) = c = 1$ ist somit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$ und damit ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig. $\boxed{\text{1 Punkt}}$