Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 02
Penn-Karras,Bärwolff,Förster,Unterreiter,Borndörfer 7. Oktober 2002

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe 3 Punkte

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion und sei die Funktion f sowohl gerade als auch ungerade.

Bestimmen Sie die Fourierreihe von f.

2. Aufgabe 13 Punkte

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x + y$.

a) Skizzieren Sie die Niveaulinien von f zu den Werten -2; 0 und 3 und skizzieren Sie außerdem das Gradientenfeld von f auf diesen Niveaulinien.

b) Geben Sie eine differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, so dass die Funktion f eingeschränkt auf die Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ sowohl ein Minimum als auch ein Maximum annimmt. Begründen Sie Ihre Wahl.

c) Geben Sie eine differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, so dass die Funktion f eingeschränkt auf die Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum annimmt. Begründen Sie Ihre Wahl.

3. Aufgabe 8 Punkte

Es sei die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $y = f(x) = \mathrm{e}^x$.

a) Parametrisieren Sie die Fläche, die entsteht, wenn der Graph von f um die x-Achse rotiert.

b) Parametrisieren Sie die Fläche, die entsteht, wenn der Graph von f um die y-Achse rotiert.

4. Aufgabe 4 Punkte

Bestimmen Sie (mit Begründung!) die Potenzreihe der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch $f(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{(y^2)}\mathrm{dy}$.

Hinweis: $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

5. Aufgabe

5 Punkte

Es sei $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, d.h. $\ell(x,y) = (c_1 \;\; c_2)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$.

Geben Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von ℓ im Punkt (a,b) an. Vereinfachen Sie dabei soweit wie möglich und begründen Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

6. Aufgabe

7 Punkte

Sei $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld mit Vektorpotenzial $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Weiter seien der folgende Kegelmantel

$$M = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1,\; z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

und die folgende Kugelkappe

$$K = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1,\; z = -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\}$$

gegeben. Die Flächen M und K seien mit "nach außen" weisenden Normalenvektoren parametrisiert.

Das Flussintegral von $\vec{w}$ durch die Fläche M habe den Wert $\iint\limits_M \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{O}} = \pi$.

a) Bestimmen Sie mit Begründung den Wert des Kurvenintegrals von $\vec{v}$ über die Randkurve von M.

b) Bestimmen Sie mit Begründung den Wert des Flussintegrals von $\vec{w}$ durch die Fläche K.

c) Bestimmen Sie mit Begründung den Wert des Volumenintegrals $\iiint\limits_B \operatorname{div} \vec{w} \,\mathrm{dV}$ über das Volumen B, das von den Flächen M und K eingeschlossen wird.

Hinweis: Was bedeutet es, dass $\vec{v}$ ein Vektorpotenzial von $\vec{w}$ ist?