Lösungen des Verständnisteils

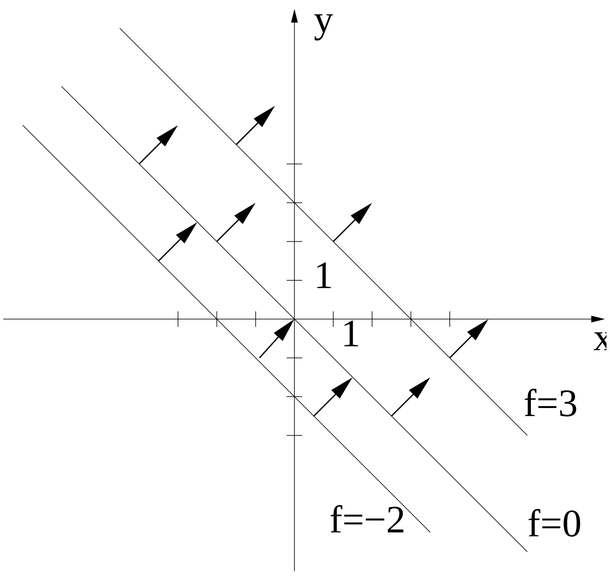
1. Aufgabe 3 Punkte

Da die Funktion f gerade ist, sind die Fourierkoeffizienten $b_k = 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$, und da f ungerade ist, sind die Fourierkoeffizienten $a_k = 0$ für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$.
Alternativ kann man feststellen, dass aus den Bedingungen, dass f gerade ist, d.h. $f(-x) = f(x)$, und dass f ungerade ist, d.h. $f(-x) = -f(x)$, folgt, dass $f(x) = -f(x)$ gelten muss. Damit ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und die Fourierkoeffizienten sind also auch alle null. $\boxed{\text{2 Punkte}}$

Damit folgt für die Fourierreihe $f \sim 0$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

2. Aufgabe 13 Punkte

a) $\boxed{\text{3 Punkte für die 3 Niveaulinien, 2 Punkte für das Gradientenfeld}}$



b) Sei z.B. $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ $\boxed{\text{1 Punkt: sinnvolle Angabe von } g}$. Dann ist die Menge der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ ein Kreis, also kompakt $\boxed{\text{1 Punkt}}$, und da f stetig $\boxed{\text{1 Punkt}}$ ist, nimmt f eingeschränkt auf die Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ ihr Minimum und ihr Maximum an $\boxed{\text{1 Punkt}}$.
Alternative ausreichende Begründung für Minimum und Maximum von f: $\boxed{\text{3 Punkte}}$.

c) Sei z.B. $g(x, y) = y$ $\boxed{\text{2 Punkte: sinnvolle Angabe von } g}$. Dann ist f eingeschränkt auf die Nebenbedingung $g(x, y) = y = 0$ gleich $f(x, y) = x + 0$. Damit kann f sowohl beliebig große Werte annehmen, falls $x \in \mathbb{R}$ genügend groß gewählt wird, als auch beliebig kleine Werte für $x \in \mathbb{R}$ genügend negativ. $\boxed{\text{2 Punkte: Begründungen}}$

3. Aufgabe

8 Punkte

a)

$$\vec{p} : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \vec{p}(x,\varphi) = (x, \mathrm{e}^x \cos\varphi, \mathrm{e}^x \sin\varphi)^T$$

$\boxed{\text{2 Punkte für die Parametrisierung, 2 Punkte für die Parameterbereiche}}$

b)

$$\vec{p} : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \vec{p}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, \mathrm{e}^r, r\sin\varphi)^T$$

$\boxed{\text{2 Punkte für die Parametrisierung, 2 Punkte für die Parameterbereiche}}$

Falls ANSTELLE korrekter Parametrisierung GUTE Skizzen vorhanden sind, können diese alternativ auch mit $\boxed{\text{je 1 Punkt}}$ bewertet werden.

4. Aufgabe

4 Punkte

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \sum_{k=0}^\infty \frac{y^{2k}}{k!} \mathrm{dy} \quad \boxed{\text{1 Punkt: Einsetzen}} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^x \frac{y^{2k}}{k!} \mathrm{dy} \quad \boxed{\text{1 Punkt: Vertauschung erlaubt, da Potenzreihe im Konvergenzbereich}} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \left[\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)k!} \right]_0^x \quad \boxed{\text{1 Punkt: Stammfunktion}} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!} \quad \boxed{\text{1 Punkt: Ausrechnen}} \end{aligned}$$

5. Aufgabe

5 Punkte

Das Taylorpolynom zweiten Grades von ℓ im Punkt (a,b) hat die Form

$$\ell(a,b) + \ell'(a,b) \binom{x-a}{y-b} + \frac{1}{2}(x-a, y-b)^T H\ell(a,b) \binom{x-a}{y-b} \quad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Da ℓ eine lineare Abbildung ist, ist $\ell'(a,b) = (c_1, c_2)$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$ und $H\ell(a,b) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$. Damit erhält man als vereinfachte Form $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$\ell(a,b) + (c_1, c_2)\left(\begin{smallmatrix} x-a \\ y-b \end{smallmatrix}\right) = c_1 a + c_2 b + c_1(x-a) + c_2(y-b) \overset{optional}{=} c_1 x + c_2 y = \ell(x,y)$$

Da ℓ bereits eine lineare Abbildung ist, d.h. ihr Graph ist eine Ebene, ist das Taylorpolynom als quadratische Approximation wieder die Abbildung selbst bzw. als Graph dieselbe Ebene. $\boxed{\text{1 Punkt}}$
Alternativ genügt es auch festzustellen, dass ℓ bereits eine lineare Abbildung ist, d.h. dass das Taylorpolynom als quadratische Approximation wieder die Abbildung ℓ selbst sein muss und dass der Graph von ℓ damit natürlich auch der Graph des Taylorpolynoms ist. $\boxed{\text{5 Punkte}}$

6. Aufgabe

7 Punkte

Da $\vec{v}$ ein Vektorpotential von $\vec{w}$ ist, gilt $\vec{w} = \mathrm{rot}\vec{v}$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

a) Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int\limits_{\partial M} \vec{v} \cdot \vec{\mathrm{ds}} \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \iint\limits_{M} (\mathrm{rot}\vec{v}) \cdot \vec{\mathrm{dO}} \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \pi.$$

Die Parametrisierung der Randkurve ∂M ist dabei entsprechend der Konvention zum Satz von Stokes gewählt. Alternativ erhält man bei umgekehrter Durchlaufrichtung der Randkurve den Wert $-\pi$.

b) Die Ränder der Flächen M und K sind gleich, nur die Parametrisierungen der Randkurven ∂M und ∂K sind entgegengesetzt. Mit dem Satz von Stokes findet man deshalb bei entgegengesetzter Parametriesierung der Randkurven

$$\iint\limits_{K} (\mathrm{rot}\vec{v}) \cdot \vec{\mathrm{dO}} \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \int\limits_{\partial K} \vec{v} \cdot \vec{\mathrm{ds}} \overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} -\int\limits_{\partial M} \vec{v} \cdot \vec{\mathrm{ds}} = -\pi$$

c) Da $\vec{w}$ ein Vektorpotential besitzt, ist $\mathrm{div}\vec{w} = 0$, folglich auch $\iiint\limits_{B} \mathrm{div}\vec{w}\ \mathrm{dV} = 0$.

$\boxed{\text{2 Punkte}}$
Alternativ kann man den Satz von Gauß verwenden und findet

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{B} \mathrm{div}\vec{w}\ \mathrm{dV} &\overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \iint\limits_{\partial B} \vec{w} \cdot \vec{\mathrm{dO}} \\ &\overset{\boxed{\text{1 Punkt}}}{=} \iint\limits_{M} \vec{w} \cdot \vec{\mathrm{dO}} + \iint\limits_{K} \vec{w} \cdot \vec{\mathrm{dO}} = \pi - \pi = 0. \end{aligned}$$

Hierbei müssen M und K allerdings so parametrisiert sein, dass die Normale auf der Oberfläche von B nach außen weist!