Analysis II für Ingenieure, SoSe 2003
Lösungen zur Juli-Vollklausur

Rechenteil

Aufgabe 1

$$\vec{v}\,'(x,y,z) = \begin{pmatrix} (xyz)^x\,(1+\ln(xyz)) & \frac{x}{y}(xyz)^x & \frac{x}{z}(xyz)^x \\ -\frac{e^y+e^z}{x^2z}\,\cos(\frac{e^y+e^z}{xz}) & \frac{e^y}{xz}\,\cos(\frac{e^y+e^z}{xz}) & \frac{e^z(z-1)-e^y}{xz^2}\,\cos(\frac{e^y+e^z}{xz}) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

$$f(x,y) = \sin(x)\,\cos(y) \quad\Rightarrow\quad f(\frac{\pi}{2},0) = 1$$

$$grad\,f = \begin{pmatrix} \cos(x)\,\cos(y) \\ -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad grad\,f(\frac{\pi}{2},0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\,\cos(y) & -\cos(x)\,\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\,\cos(y) \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad H_f(\frac{\pi}{2},0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Das Taylorpolynom lautet:

$$\begin{aligned} T_2((x,y);(\frac{\pi}{2},0)) &= 1+0+\frac{1}{2}\,(x-\frac{\pi}{2},y)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1+\frac{1}{2}\,(x-\frac{\pi}{2},y)\begin{pmatrix} -x+\frac{\pi}{2} \\ -y \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\,x^2-\frac{1}{2}\,y^2+\frac{\pi}{2}\,x+(1-\frac{\pi^2}{8}) \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Maximiere $f(x,y,z) = xyz$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x+y+z-135 = 0$. Die Lagrangefunktion lautet:

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(x+y+z-135)$$

$grad\,L(x,y,z,\lambda) = \vec{0}$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & yz+\lambda & = & 0 \\ \text{II} & xz+\lambda & = & 0 \\ \text{III} & xy+\lambda & = & 0 \\ \text{IV} & x+y+z-135 & = & 0 \end{array}$$

$x,y,z \neq 0$, da sonst das Produkt nicht maximal sein kann. Damit folgt aus I=II: $x=y$ und aus II=III: $y=z$. Damit gilt

$$x=y=z.$$

In IV eingesetzt bekommt man die Gleichung $3x = 135$ und damit lautet die Maximalstelle

$$x=y=z=45.$$

Aufgabe 4
Die notwendigen Größen lauten:

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi], \quad \dot{\vec{c}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(\vec{c}(t)) = \begin{pmatrix} t + \sin^2 t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Damit kann das Kurvenintegral berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int_{\vec{c}} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} t + \sin^2 t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} t + \sin^2 t + \cos^2 t \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} t + 1 \, dt = \frac{1}{2} t^2 + t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi(1 + \pi) \end{aligned}$$

Aufgabe 5
Eine Parametrisierung des Bereichs ist gegeben durch

$$\begin{array}{llll} \mathrm{I} & y = & x + u, & u \in [0, 1] \\ \mathrm{II} & y = & -vx + 3, & v \in [1, 2] \end{array}$$

I=II und auflösen nach x liefert: $x(u, v) = \frac{3-u}{1+v}$ und einsetzen dieses Ergebnisses in I liefert: $y(u, v) = \frac{3+uv}{1+v}$. Insgesamt lautet die Transformation also:

$$\vec{\phi}(u, v) = \frac{1}{1+v} \begin{pmatrix} 3 - u \\ 3 + uv \end{pmatrix},\ (u, v) \in [0, 1] \times [1, 2]$$

mit der Jacobimatrix

$$J_{\vec{\phi}}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{1+v} & \frac{u-3}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u-3}{(1+v)^2} \end{pmatrix}$$

und dem Betrag der Determinante der Jacobimatrix:

$$\left| det\, J_{\vec{\phi}}(u, v) \right| = \left| \frac{3-u}{(1+v)^3} + v \frac{3-u}{(1+v)^3} \right| = \left| (1+v) \frac{3-u}{(1+v)^3} \right| = \left| \frac{3-u}{(1+v)^2} \right| = \frac{3-u}{(1+v)^2}$$

Nun lässt sich das Integral mittels Transformationsformel lösen:

$$\begin{aligned} \int\int_B \frac{1}{x} \, dF &\overset{Trafo}{=} \int_1^2 \int_0^1 \frac{1+v}{3-u} \frac{3-u}{(1+v)^2} \, du \, dv = \int_1^2 \int_0^1 \frac{1}{1+v} \, du \, dv = \int_1^2 \frac{1}{1+v} \, dv \\ &= \ln(1+v) \Big|_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 6
Eine Parametrisierung der gebogenen Fläche ist für $(s, t) \in [0, 1] \times [0, \pi]$

$$\vec{u}(s, t) = \begin{pmatrix} s \\ t \\ \sin t \end{pmatrix},\ \vec{u}_s(s, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{u}_t(s, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cos t \end{pmatrix},\ \vec{u}_s \times \vec{u}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ cost \\ -1 \end{pmatrix}$$

Mit $|\vec{u}_s \times \vec{u}_t| = \sqrt{1 + \cos^2 t}$ berechnet sich die Gesamtladung zu:

$$\begin{aligned} \Omega &= \int\int_S \omega \, dO = \int_0^1 \int_0^\pi \frac{s \ \sin t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \sqrt{1 + \cos^2 t} \, dt \, ds = \int_0^1 \int_0^\pi s \ \sin t \, dt \, ds \\ &= \int_0^1 -s \ \cos t \Big|_{t=0}^{t=\pi} ds = \int_0^1 2s \, ds = s^2 \Big|_0^1 = 1 \end{aligned}$$