Analysis II für Ingenieure, SoSe 2003
Lösungen zur Juli-Vollklausur

Verständnisteil

Aufgabe 1

Zum Beispiel:

a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, $B = \emptyset$

b) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq 2\right\}$, $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

c) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\right\}$

d) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 < 2\right\}$, $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

e) $A = \mathbb{R}^2$, $B = \emptyset$

Aufgabe 2

a) Ja, denn
$\underline{x > 1}$: Da $1 + y^2 \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, und $\ln x$ für $x > 1$ überall definiert ist, ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig.
$\underline{x < 1}$: Da der Nenner $1 + (x-1)^2 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig.

b) $f(1,y) = \frac{(1-1)^2 + y^2 \ln 1}{1+y^2} = 0$ und der linksseitige Grenzwert ist:

$$\lim_{h\to 0} f(1-h,y) = \lim_{h\to 0} \frac{(1-h)+y-1}{1+(1-h-1)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{y-h}{1+h^2} = y$$

Damit ist f nur für $y = 0$ in $(1,y)$ stetig.

c) <u>rechtsseitige partielle Ableitung</u>: $(h > 0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(1+h-1)^2 + \ln(1+h)}{1+1^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + \ln(1+h)}{2h}$$

$$\overset{L'Hospital}{=} \lim_{h\to 0} \frac{2h + \frac{1}{1+h}}{2} = \frac{1}{2}$$

<u>linksseitige partielle Ableitung</u>: $(h > 0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1-h,1) - f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-h+1-1}{1+(1-h-1)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-h}{h+h^3} = +\infty$$

Aufgabe 3

<u>notwendig</u>: $grad\, f(x,y,z) = \vec{0}$

<u>hinreichend</u>:

für Minimum: Hessematrix von $f(x,y,z)$ positiv definit
(alle Eigenwerte der Hessematrix > 0)
(Hesseform > 0)

für Maximum: Hessematrix von $f(x,y,z)$ negativ definit
(alle Eigenwerte der Hessematrix < 0)
(Hesseform < 0)

für Sattelpunkt: Hessematrix von $f(x,y,z)$ indefinit
Eigenwerte sowohl > 0 als auch < 0
(Hesseform hat Vorzeichenwechsel).

Aufgabe 4

	Skalares Feld	Vektorfeld	nicht definiert
rot(rot $\vec{v}$)		x	
div(div $\vec{v}$)			x
rot($\phi \cdot$ grad ϕ)		x	
$\vec{v} \cdot$ rot $\vec{v}$	x		
div(grad ϕ)	x		
rot($\vec{v} \times \vec{v}$)		x	
$\phi \cdot$ grad ϕ		x	
div($\vec{v} \times$ rot $\vec{v}$)	x		
grad(rot $\vec{v}$)			x
grad(div $\vec{v}$)		x	

Aufgabe 5

Ist $\vec{v}(x,y,z)$ ein Potentialfeld?

ja, da $rot\, \vec{v} = \vec{0}$ und der Defintionsbereich offen und konvex ist,

ODER

ja, da man eine Stammfkt. angeben kann: z.B. $f(x,y,z) = -\cos x + \frac{1}{2}y^2 + \sin z$

Da die Kurve $\vec{c}(t)$ geschlossen ist ($\vec{c}(0) = \vec{c}(2\pi) = (1,0,1)^T$) und $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist, gilt

$$\oint_{\vec{c}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Aufgabe 6

Eine Parametrisierung der allgemeinen Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ lautet

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Hier ist $a = \sqrt{2}$ und $b = 2$, und die gesuchte Kurve ist nur ein Teil der Ellipse. Deswegen muss der Parameterbereich eingeschränkt werden. Dafür gibt es je nach gewählter Strecke (z.B.) zwei Möglichkeiten:

i) mathematisch positiv (gegen den Uhrzeigersinn):

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [\frac{\pi}{4}, 2\pi].$$

ii) mathematisch negativ (im Uhrzeigersinn):

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [-\frac{\pi}{4}, 0].$$