Analysis II für Ingenieure
Lösungen zur Oktober-Vollklausur
Sommersemester 2003 – 13. Oktober 2003

Rechenteil

Aufgabe 1

a) $\underline{(x,y) \neq (0,0)}$: nach Produkt- und Quotientenregel

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ f_y(x,y) &= x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$\underline{(x,y) = (0,0)}$:

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \\ f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h(0-h^4)+0}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{h^5}{h^5} = -1 \\ f_{yx}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h(h^4-0)+0}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$grad\, f(x,y) = \left(3x^2 - 6y\,,\, 24y^2 - 6x\right) \stackrel{!}{=} (0,0)$$

Das entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & x^2 - 2y & = & 0 & \Rightarrow \quad y = \frac{x^2}{2} \\ \text{II} & 4y^2 - x & = & 0 & \end{array}$$

y in II einsetzen liefert: $x^4 - x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 0,\, x_2 = 1.$
x_1 in I einsetzen liefert: $y_1 = 0$, x_2 in I ergibt: $y_2 = \frac{1}{2}$. Es gibt also 2 Kandidaten

$$P_1(0,0), P_2(1,\tfrac{1}{2})$$

Die Hessematrix lautet

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{pmatrix}.$$

Überprüfen der Kandidaten:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det H_f(0,0) = -36 < 0 \qquad \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$H_f(1,\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}, \quad \det H_f(1,\tfrac{1}{2}) = 108 > 0, f_{xx}(1,\tfrac{1}{2}) = 6 > 0 \qquad \Rightarrow \text{Minimum}$$

Aufgabe 3

Für diese Aufgabe gibt es zwei Lösungswege: *(Skizze)*

1. Lösungsweg:
$x^2 + y^2 = 2z$ sind Kreise in der $xy-$Ebene mit Radius $r = \sqrt{2z}$.
Idee: Transformation auf Zylinderkoordinaten.
Dann sind die Variablen aus den Intervallen: $t \in [0, 2\pi], z \in [0,2], r \in [0, \sqrt{2z}]$.

$$\vec{\phi}(r,t,z) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ z \end{pmatrix}, \quad J_{\vec{\phi}}(r,t,z) = \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t & 0 \\ \sin t & r\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix: $|det\, J_{\vec{\phi}}(r,t,z)| = r$.
Damit kann das Volumenintegral auf Zylinderkoordinaten transformiert werden:

$$V = \int\int\int 1\, dx\, dy\, dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2z}} r\, dr\, dt\, dz = 2\pi \int_0^2 z\, dz = 4\pi$$

2. Lösungsweg:
Idee: Parametrisiere das ganze Volumen und transformiere damit.
Dann sind die Variablen aus den Intervallen: $t \in [0, 2\pi], z \in [0, 2], r \in [0, 1]$.

$$\vec{\phi}(r,t,z) = \begin{pmatrix} zr\, \cos t \\ zr\, \sin t \\ \frac{1}{2}z^2 \end{pmatrix}, \quad J_{\vec{\phi}}(r,t,z) = \begin{pmatrix} z\, \cos t & -zr\, \sin t & r\, \cos t \\ z\, \sin t & zr\, \cos t & r\, \sin t \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Der Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix: $|det\, J_{\vec{\phi}}(r,t,z)| = z^3 r$.
Damit kann das Volumenintegral transformiert werden:

$$V = \int\int\int 1\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2\pi} z^3 r\, dt\, dz\, dr = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{4} z^4 r \Big|_{z=0}^{z=2} dr = 4\pi$$

Aufgabe 4

a) Die Parametrisierung $\vec{\phi}$ der Oberfläche des Rotationskörpers und die Rotation von $\vec{v}$ lauten:

$$\vec{\phi}(r,t) = \begin{pmatrix} r\, \cos t \\ r\, \sin t \\ 1 - r^2 \end{pmatrix}, \, r \in [0,1],\, t \in [0, 2\pi], \quad rot\, \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Um das Flussintegral berechnen zu können, braucht man $rot\, \vec{v} \cdot (\vec{\phi}_r \times \vec{\phi}_t)$:

$$rot\, \vec{v} \cdot (\vec{\phi}_r \times \vec{\phi}_t) = det(rot\, \vec{v}, \vec{\phi}_r, \vec{\phi}_t) = det \begin{pmatrix} 1 & \cos t & -r\, \sin t \\ -1 & \sin t & r\, \cos t \\ -2 & -2r & 0 \end{pmatrix} = -2r + 2r^2(\cos t - \sin t)$$

Damit kann das Flussintegral berechnet werden:

$$\int\int_S rot\, \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^2(\cos t - \sin t) - 2r\, dt\, dr = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r\, dt\, dr = -2\pi$$

b) Satz von Stokes: S sei eine parametrisierte Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit einer Randkurve ∂S, die so durchlaufen wird, dass die Normale auf S und die Durchlaufrichtung durch ∂S ein Rechtssystem bilden. Dann gilt für $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}$ stetig partiell differenzierbar:

$$\int\int_S rot\, \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

In dieser Aufgabe ist die Randkurve ∂S der Einheitskreis in der $xy-$Ebene. Damit der Satz von Stokes anwendbar ist, müssen alle Voraussetzungen überprüft werden:
$\vec{v}$ ist stetig partiell differenzierbar. Der Kreis muss so parametrisiert werden, dass Normale und Durchlaufrichtung ein Rechtssystem bilden:

$$\vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi], \quad \vec{\phi}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt der Satz von Stokes:

$$\int_S rot\, \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi$$