Analysis II für Ingenieure
Lösungen zur Oktober-Vollklausur
Sommersemeser 2003 – 13. Oktober 2003

Verständnisteil

Aufgabe 1

Menge	offen	beschränkt	konvex
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 < 10\}$	$+$	$+$	$\circ$
$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 10\}$	$\circ$	$+$	$\circ$
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sin x\cdot\cos y \neq 0\}$	$+$	$\circ$	$\circ$
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -x^2-1 \le y \le x^2+1, \lvert x\rvert \le 1\}$	$\circ$	$+$	$\circ$

Aufgabe 2

$$grad\, f(x,y) = \left(-\frac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}}\sqrt{y}\,,\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{xy}}\right), \qquad grad\, f(1,1) = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Damit können die Gleichungen für die gesuchte Richtung $\vec{a}$ aufgestellt werden:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & grad\, f(1,1)\cdot\vec{a} & = & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{II} & \|\vec{a}\|^2 & = & 1 \end{array}$$

Das ist hier

$$\begin{array}{lrcll} \text{I} & -\frac{1}{2}\,a_1+\frac{1}{2}\,a_2 & = & \frac{1}{\sqrt{2}} & \Rightarrow \quad a_2=\sqrt{2}+a_1 \\ \text{II} & a_1^2+a_2^2 & = & 1 & \end{array}$$

a_2 in II einsetzen liefert die quadratische Gleichung

$$a_1^2+\sqrt{2}\,a_1+\frac{1}{2}=0.$$

Die Lösung lautet $a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ und damit ist $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die gesuchte Richtung ist also

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

$$rot\,(\phi\vec{v}) = rot\begin{pmatrix} \phi v_1 \\ \phi v_2 \\ \phi v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\phi v_3)_y-(\phi v_2)_z \\ (\phi v_1)_z-(\phi v_3)_x \\ (\phi v_2)_x-(\phi v_1)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_y v_3+\phi v_{3y}-\phi_z v_2-\phi v_{2z} \\ \phi_z v_1+\phi v_{1z}-\phi_x v_3-\phi v_{3x} \\ \phi_x v_2+\phi v_{2x}-\phi_y v_1-\phi v_{1y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} grad\,\phi\times\vec{v}+\phi\, rot\,\vec{v} &= \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}+\phi\begin{pmatrix} v_{3y}-v_{2z} \\ v_{1z}-v_{3x} \\ v_{2x}-v_{1y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_y v_3-\phi_z v_2 \\ \phi_z v_1-\phi_x v_3 \\ \phi_x v_2-\phi_y v_1 \end{pmatrix}+\phi\begin{pmatrix} v_{3y}-v_{2z} \\ v_{1z}-v_{3x} \\ v_{2x}-v_{1y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_y v_3+\phi v_{3y}-\phi_z v_2-\phi v_{2z} \\ \phi_z v_1+\phi v_{1z}-\phi_x v_3-\phi v_{3x} \\ \phi_x v_2+\phi v_{2x}-\phi_y v_1-\phi v_{1y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Man muss eine geschlossene Kurve wählen, die die Problemstelle (z-Achse) enthält, z.B. Einheitkreis um den Ursprung in der $xy-$Ebene:

$$\vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi], \qquad \vec{\phi}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt integriert man $\vec{v}$ entlang dieser geschlossenen Kurve:

$$\int_{Kreis} \vec{v}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

Damit kann $\vec{v}$ **kein** Potentialfeld sein, da ansonsten ein Integral über eine geschlossene Kurve Null ergeben **muss**.

b) Die Stammfunktion muss nur existieren, falls $rot\, \vec{v} = 0$ **und** D offen und konvex ist.
Hier: D ist der $\mathbb{R}^2$ ohne die z-Achse. Diese Menge ist zwar offen, aber nicht konvex.

Aufgabe 5

a) Kugelkoordinaten:

$$\vec{\phi}(t, \theta) = 6378 \begin{pmatrix} \cos t\, \cos\theta \\ \sin t\, \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi],\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0].$$

b) Schnitt zwischen Kegel und Zylinder:

$$z^2 = 4 \qquad \Rightarrow z_{1,2} = \pm 2.$$

Da $z \leq -1$ gilt, kommt als Schnitt nur $z = -2$ in Frage: $z \in [-2, -1]$.
Eine vollständige Parametrisierung lautet:

$$\vec{\phi}(r, t, z) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ z \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi],\ z \in [-2, -1],\ r \in [-z, 2].$$