TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03/04
Fakultät II - Institut für Mathematik Stand: 27. Februar 2004
Grigorieff/Penn–Karras
Lehmann/Peters

Lösungen zur Klausur vom 23.02.2003
Analysis II für Ingenieure

Rechenteil

1. Aufgabe

(10 Punkte) **LMT: 3**

a) Die Nullstellen des Nenners sind -1 und -2. Also machen wir den folgenden Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$. Mit der Einsetzmethode oder durch Koeffizientenvergleich ergibt sich $A = 1$ und $B = -1$. Die Stammfunktionen von f sind also

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}dx$$
$$= \ln|x+1| - \ln|x+2| + c = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b) Mit a) erhalten wir $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \ln\frac{1}{2} = \ln 2.$

2. Aufgabe

(10 Punkte)

a) Skizze.

b) Die komplexe Fourierreihe von f lautet $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$. Die Koeffizienten c_k sind

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi xe^{-ikx}dx.$$

Mit partieller Integration, $u = x$, $v' = e^{-ikx}$, erhält man für $k \neq 0$

$$= \frac{-1}{2\pi ik}\left[xe^{-ikx}\right]_0^\pi + \frac{1}{2\pi ik}\int_0^\pi e^{-ikx}dx$$
$$= \frac{-1}{2\pi ik}\pi(e^{-i\pi})^k + \frac{1}{2\pi k^2}((e^{-i\pi})^k - e^0) = \frac{(-1)^{k+1}}{2ik} + \frac{(-1)^k - 1}{2\pi k^2}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_o^\pi xdx = \frac{\pi}{4}$$

Die komplexe Fourierreihe von f ist also

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{k=-\infty,\, k\neq 0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2ik} + \frac{(-1)^k - 1}{2\pi k^2}\right)e^{ikx}$$

c) Die Funktion f ist stückweise monoton, also konvergiert die Fourierreihe im Punkt $x = \pi$ gegen den Mittelwert aus rechts– und linksseitigem Grenzwert an der Stelle π, d.h., gegen $\frac{f(\pi-)+f(\pi+)}{2} = \frac{\pi-0}{2} = \frac{\pi}{2}$

3. Aufgabe

(10 Punkte) **2/3: 1**
LMT: 4

a) Die kritischen Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ von f sind diejenigen Punkte, für die gilt $\operatorname{grad} f(x, y) = (y+1, x) = 0$. D.h., $(x, y) = (0, -1)$. Die Hessesche Matrix von f ist $\operatorname{Hess} f(x, y) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Daher ist $\det \operatorname{Hess} f(0, -1) = -1$, also ist $(0, -1)$ ein Sattelpunkt von f. f hat weder ein globales Maximum noch ein globales Minimum auf R^2, da f keine lokalen Extrema und R^2 keine Randpunkte hat.

b) Da D kompakt ist besitzt f auf D ein globales Maximum und ein globales Minimum. Aus a) folgt, dass f im Inneren von D weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum besitzt. Also liegt das globale Maximum auf dem Rand von D. Die kritischen Punkte von f auf dem Rand von D sind Lösung des Gleichungssystems

$$(y+1, x) = \operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g = \lambda(2x, 2y), \quad g(x, y) = 0, \quad x, y, \lambda \in \mathbb{R}$$

wobei $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. (Die Nebenbedingung ist nicht degeneriert, da es keine $x, y \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $g(x, y) = 0$ und $\operatorname{grad} g(x, y) = (0, 0)$.) Wir haben also 3 Gleichungen

$$y + 1 = 2\lambda x, \quad x = 2\lambda y, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Die zweite Gleichung in die erste eingesetzt ergibt $y+1 = 4\lambda^2 y \Leftrightarrow y(1-4\lambda^2) = -1$. Somit ist $1 - 4\lambda^2 \neq 0$ und man kann nach y umstellen:

$$y = \frac{-1}{1-4\lambda^2} \quad \text{und} \quad x = \frac{-2\lambda}{1-4\lambda^2}.$$

Letzteres mit der zweiten Gleichung. In die dritte Gleichung eingesetzt

$$1 = \frac{1+4\lambda^2}{(1-4\lambda^2)^2} \iff 4\lambda^2(-3+4\lambda^2) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ oder } \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Das ergibt die kritischen Punkte: $(0, -1)$ und $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ mit den Funktionswerten

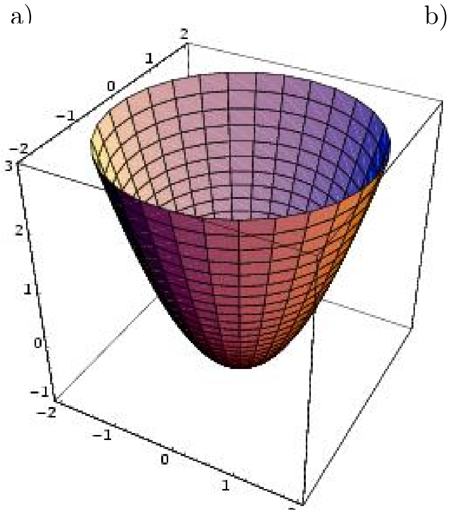
$$f(0, -1) = -1, \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3\frac{\sqrt{3}}{4} - 1, \quad f\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -3\frac{\sqrt{3}}{4} - 1.$$

D.h., das globale Maximum von f auf D liegt bei $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

4. Aufgabe

(10 Punkte) **2/3: 2**

a)



b) Mit Zylinderkoordinaten:

$$(x, y, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z), dxdydz = rdrd\varphi dz.$$

erhält man

$$\begin{aligned} V(B) &= \int_{-1}^{3}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\sqrt{1+z}} rdrd\varphi dz \\ &= 2\pi\int_{-1}^{3}\frac{1}{2}(1+z)dz = \pi\left[z + \frac{1}{2}z^2\right]_{-1}^{3} = 8\pi \\ V(B) &= \int_{0}^{2}\int_{0}^{2\pi}\int_{r^2-1}^{3} rdzd\varphi dr \\ &= 2\pi\int_{0}^{2} 4r - r^3 dr = 2\pi\left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_{0}^{2} = 8\pi \end{aligned}$$

Verständnisteil

1. Aufgabe (8 Punkte) **2/3 & LMT: 3**

a) Da die Funktion ein Polynom vom Grad 1 ist, ist das Taylorpolynom 2. Ordnung in allen Punkten gleich f:

$$T(x,y) = ax + by + c = a(x-1) + b(y-1) + a + b + c.$$

b) Der Gradient von f zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs: $\operatorname{grad} f(x,y) = \binom{a}{b}$. In allen Punkten ist der Anstieg von f in Richtung $\binom{a}{b}$ am größten.

2. Aufgabe (8 Punkte) **2/3 & LMT: 4**

Da f nach Definition Stammfunktion von $\vec{v}$ ist, erhalten wir

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = f(\vec{\gamma}(2\pi)) - f(\vec{\gamma}(0)) = f(1,0,2) - f(1,0,0) = \frac{1}{5} - 1 = -\frac{4}{5}.$$

3. Aufgabe (8 Punkte)

Die Ableitungsmatrix ist die Matrix der linearen Abbildung $(x,y,z) \mapsto (y,z,x)$ also

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe (8 Punkte)

a) Da f eine Stammfunktion von $\vec{v}$ ist, hat $\vec{v}$ natürlich ein Potential, und zwar $u = -f$.

b) Es gilt $\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 12(x+ay)^2 + 12a^2(x+ay)^2 + 0 = 12(1+a^2)(x+ay)^2$. D.h., $\operatorname{div} \vec{v}$ ist für kein $a \in \mathbb{R}$ gleich Null. Also besitzt $\vec{v}$ kein Vektorpotenzial, da $\vec{v}$ das notwendige Kriterium für die Existenz eines Vektorpotentials nicht erfüllt.

5. Aufgabe (8 Punkte) **2/3 & LMT: 5, 4 Punkte**

a) Falsch, b) Falsch, c) Falsch, d) Falsch, e) Richtig, f) Richtig, g) Falsch, h) Falsch. **LMT: 5, 4 Punkte**
2/3: a) Falsch, b) Falsch, c) Richtig, d) Falsch.
LMT a) Falsch, b) Falsch, c) Falsh, d) Falsch.