TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03/04
Fakultät II - Institut für Mathematik Stand: 6. April 2004
Grigorieff/Penn–Karras
Lehmann/Peters

Lösungen zur Klausur vom 5.04.2003
Analysis II für Ingenieure

Rechenteil

1. Aufgabe

(10 Punkte) **2/3**

Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3}{x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}.$$

Daraus folgt $A = 1$ und $B = -1$, also $\frac{3}{x^2+3x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}$ und $\int \frac{3}{x^2+3x} = \ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + c$.

(i) $\int_0^2 \frac{3}{x^2+3x} = \ln\frac{2}{5} - \lim_{a\to 0}\ln\left|\frac{a}{a+3}\right| = \infty$. Also existiert das Integral nicht.

(ii) $\int_2^\infty \frac{3}{x^2+3x} = \lim_{b\to\infty}\ln\left|\frac{b}{b+3}\right| - \ln\frac{2}{5} = -\ln\frac{2}{5}$.

(iii) Aus (i) und (ii) folgt, dass das Integral $\int_0^\infty \frac{3}{x^2+3x}$ nicht existiert.

2. Aufgabe

(10 Punkte)

Die Funktion muss gerade auf $[-\pi,\pi[$ fortgesetzt werden. Die Koeffizienten a_k for $\cos(kx)$ sind dann für $k \neq 0$:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(kx)dx,$$

(mit partieller Integration $u = x$, $v' = \cos kx$, $u' = 1$ und $v = \frac{1}{k}\sin(kx)$)

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{k}\sin(kx)\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{k}\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k^2}\cos(kx)\right]_0^\pi = \frac{2}{k^2\pi}((-1)^k - 1),$$

und für $k = 0$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi xdx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^\pi = \pi.$$

Also hat f die Fourierreihe (mit $k = 2n+1$):

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$$

3. Aufgabe

(10 Punkte) **2/3**

a) Skizze: Punkt $(-1,1)$ und zwei Kreise mit Radius 1 und $\sqrt{2}$ um diesen Punkt.

b) Der Gradient $\operatorname{grad} f(x,y) = 2(x+1, y-1)$ von f besitzt genau eine Nullstelle: $(x,y) = (-1,1)$. Da $f(-1,1) = 0 \leq f(x,y)$, nimmt die Funktion f bei $(-1,1)$ ihr globales Minimum 0 (auf D) an. Da f stetig und D kompakt ist, und im Inneren von D kein weiterer kritischer Punkt von f liegt, muss f das globale Maximum auf dem Rand ∂D von D annehmen. Da die Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 8 = 0$ nicht ausgeartet ist ($\operatorname{grad} g(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \partial D$), muss die Maximumstelle das Gleichungssystem

$$2(x+1, y-1) = 2\lambda(x,y), \qquad\qquad x^2 + y^2 - 8 = 0.$$

lösen. D.h., $(x,y,\lambda) = (2,-2,\frac{3}{2})$ oder $(x,y,\lambda) = (-2,2,\frac{1}{2})$. Aus $f(2,-2) = 18$ und $f(-2,2) = 2$ folgt, dass die Funktion f auf D bei $(2,-2)$ ihr Maximum 18 annimmt.

4. Aufgabe

(10 Punkte)

a) Skizze: Kreiskegel (Radius gleich Höhe gleich 1) auf die Spitze (Nullpunkt) gestellt.

b) Die Divergenz von $\vec{v}$ ist $\operatorname{div} \vec{v}(x,y,z) = 2$. Mit dem Satz von Gauss gilt dann (mit Zylinderkoordinaten $dxdydz = rdrd\varphi dz$)

$$\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_K \operatorname{div} \vec{v} \, dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^z 2rdrd\varphi dz) = 2\pi \int_0^1 z^2 dz = \frac{2}{3}\pi.$$

oder $\int_K \operatorname{div} \vec{v} \, dV = 2\mathrm{Vol}(K) = \frac{2}{3}\pi$.

Verständnisteil

1. Aufgabe (8 Punkte)

Da $5x^3$ ein Polynom 3. Grades (entwickelt an der Stelle $(0,1)$) ist, ist das Taylorpolynom 2. Ordnung von f an der Stelle $(0,1)$ gleich

$$(y-1)^2 + 7x(y-1). \tag{1}$$

2. Aufgabe (8 Punkte) **2/3**

Die Funktion $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ist eine Stammfunktion von $\vec{v}$, da $\operatorname{grad} f = \vec{v}$. Also ist

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{x} = f(-2,0,0) - f(2,0,0) = 4 - 4 = 0.$$

3. Aufgabe (8 Punkte) **2/3**

Nach der Kettenregel ist

$$D(\vec{f} \circ \vec{g})(0,0) = D\vec{f}(g(0,00))D\vec{g}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe (8 Punkte)

Die Funktion ist nicht differenzierbar, da sie nicht partiell diferenzierbar ist, weil die Funktion $f(x,0) = |x|$ nicht differenzierbar ist.

5. Aufgabe (8 Punkte) **2/3**

a) falsch, b) falsch, c) richtig, d) richtig, e) falsch, f) richtig, g) falsch, h) richtig.
2/3: a) falsch, b) falsch, c) richtig, d) falsch.