Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 04

Bärwolff, Fuhrmann, Mehl, Penn-Karras, Scherfner 21. Juli 2004

Juli – Klausur (Rechenteil)
Analysis II für Ingenieure
Lösungsblatt

---

1. Aufgabe 7 Punkte

Mit der Parametrisierung $x(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi, r)^T$ mit $\phi \in [0, 2\pi], r \in [0, 3]$.

erhält man

$$x_r \times x_\phi \;=\; -r(\cos\phi, \sin\phi, -1)^t,$$

$$|x_r \times x_\phi| \;=\; \sqrt{2}r$$

$$\iint_{\partial K} dO \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{2}r\,dr\,d\phi \;=\; 2\pi\sqrt{2}\frac{r^2}{2}|_0^3 = 9\sqrt{2}\pi$$

2. Aufgabe 8 Punkte

Die Jacobi-Matrix von $\vec{V}$

$$DV(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 2y - ycosx & 2x - \sin x & 0 \\ -\sin x + 2x & -z\sin y & \cos y \\ 0 & \cos y & 6z \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch (alternativ kann man auch durch Nachrechnen verifizieren, dass $\operatorname{rot}\vec{V} \;=\; 0$).

Da $\mathbb{R}^n$ konvex ist hat $\vec{V}$ also ein Potential.
Als Stammfunktion berechnet man
$f_x = -y\sin x + 2xy \;\Rightarrow\; f(x,y,z) = y\cos x + x^2y + C(y,z)$
$\Rightarrow\; f_y = \cos x + x^2 + C_y(y,z) = \cos x + x^2 + z\cos y$
$\Rightarrow\; C_y(y,z) = z\cos y \;\Rightarrow\; C(y,z) = z\sin y + D(z)$
$\Rightarrow\; f_z = \sin y + D_z(z) = \sin y + 3z^2 \;\Rightarrow\; D_z(z) = 3z^2 \Rightarrow D(z) = z^3 + c$
$\Rightarrow\; f(x,y,z) = y\cos x + x^2y + z\sin y + z^3 + c$ 5

3. Aufgabe

5 Punkte

Mit Zylinderkoordinaten berechnet man

$$\iiint\limits_M \frac{1}{\sqrt{z}\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}r} rdrdzd\phi \;=\; 4\pi$$

4. Aufgabe

12 Punkte

a) Das Gradientenkriterium $\nabla f = \lambda \nabla g$ liefert

$$\begin{aligned} y &= \lambda 2x \\ x+1 &= -\lambda 2y \\ 3z^2 &= 0 \\ y^2 &= x^2 (NB), \end{aligned}$$

Aus der 1. Bedingung und der NB erhhält man $\lambda = \pm\frac{1}{2}$

Aus der 2. und der 3. Bedingung folgt dann

$$y = \mp(x+1) \text{ und } x = -\frac{1}{2}$$

Hieraus erhält man die kritischen Punkte

$$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), \quad (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0),$$

sowie (0,0,z) für grad $g = \vec{0}$

b) Die Nebenbedingung schränkt die Wahl von z nicht ein. Man kann in z also frei variieren und bei festem $(x, y) \in \{g(x, y) = 0\}$ jeden beliebigen Funktionswert $f(x, y, z)$ durch entsprechende Wahl von z erreichen, ohne die Nebenbedingung zu verletzen.

5. Aufgabe

8 Punkte

Das Dreieck ist $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 2-x\}$
Entweder rechnet man mit dem Satz von Green
$\int_{\partial B} \vec{V} \cdot \vec{ds} \;=\; \iint_B (\partial_x v_y - \partial_y v_x) dxdy \;=\; \int_0^1 \int_x^{2-x} (2x+y+3) dydx$
$= \int_0^1 [2xy + \frac{y^2}{2} + 3y]_{y=x}^{2-x} dx = \int_0^1 (-4x^2 - 4x + 8) dx = -\frac{4}{3} - 2 + 8 = \frac{14}{3}$.
Oder man rechnet das Randintegral auf direktem Wege aus
Die Dreiecksseiten sind:
$\gamma_1(t) = (t,\ t)^T,\ t \in [0,1] \quad \gamma_2(t) = (1-t,\ 1+t)^T,\ t \in [0,1]$
$\gamma_3(t) = (0,\ 2-t)^T, t \in [0,2]$.
Und damit
$\int_{\partial B} \vec{V} \cdot \vec{ds} \;=\; \int_0^1 (4t^2 - 3t) dt + \int_0^1 (-2t^2 + 5t + 3) dt + \int_0^2 0 dt = [\frac{2}{3}t^3 + t^2 + 3t]_0^1 = \frac{14}{3}$.