Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 04
Bärwolff, Fuhrmann, Mehl, Penn-Karras, Scherfner 11.10.2004

Oktober – Klausur (Rechenteil)
Analysis II für Ingenieure
Lösungsblatt

---

1. Aufgabe 9 Punkte

Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = x - 2y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 = 8$.

Lösung:

Wir setzen $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8$. Durch die Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ ist eine kompakte Menge definiert. Weil die Funktion f stetig ist, nimmt sie auf dieser Menge ihr Minimum und Maximum an.

Es gilt

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} g = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0) \qquad \text{und} \qquad g(0,0) = -8 \neq 0.$$

Also tritt bei dieser Nebenbedingung der singuläre Fall nicht auf.

Aus

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} = \lambda \operatorname{grad} g(x,y)$$

folgt $(x,y) = (\frac{1}{2\lambda}, -\frac{1}{4\lambda})$. Einsetzen in die Nebenbedingung liefert die Gleichung

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 8,$$

aus der man $\lambda = \pm\frac{1}{4}$ erhält. Also sind $(2,-1)$ und $(-2,1)$ die kritischen Punkte von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Wegen

$$f(2,-1) = 4 > -4 = f(-2,1)$$

hat f in $(2,-1)$ ein Maximum und in $(-2,1)$ ein Minimum unter der Nebenbedingung $g = 0$.

2. Aufgabe 7 Punkte

Berechnen Sie das Volumen des Körpers über dem Rechteck $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$, der in z-Richtung durch die Graphen

$$z = 3 + \frac{y}{2} \quad \text{und} \quad z = 1 + \sin(x)$$

begrenzt ist.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1+\sin x}^{3+\frac{y}{2}} dz dy dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(3 + \frac{y}{2} - 1 - \sin x\right) dy dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left[2y + \frac{y^2}{4} - y \sin x\right]_0^1 dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{1}{4} - \sin x\right) dx \\
&= \left[\frac{9}{4} x + \cos x\right]_0^{2\pi} = \frac{9}{2}\pi.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe 8 Punkte

Parametrisieren Sie die Fläche

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = (1 - z)^2 \ , \ 0 \leq z \leq 2\right\} \ .$$

und bestimmen Sie das (skalare) Oberflächenelement dO der Parametrisierung.

Lösung:

Eine Parametrisierung der Fläche S ist gegeben durch

$$\Psi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} (1 - z) \cos \varphi \\ (1 - z) \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi), \quad z \in [0, 2].$$

Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\Psi_\varphi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -(1 - z) \sin \varphi \\ (1 - z) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Psi_z(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das skalare Oberflächenelement berechnet sich dann wie folgt

$$\begin{aligned}
dO = |\Psi_\varphi(\varphi, z) \times \Psi_z(\varphi, z)| &= \left| \begin{pmatrix} (1 - z) \cos \varphi \\ (1 - z) \sin \varphi \\ (1 - z)(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \end{pmatrix} \right| \\
&= |1 - z| \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

4. Aufgabe 8 Punkte

Berechnen Sie die Hessematrix der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\ , \quad f(x,y) = x\ \ln\frac{x}{y}\ .$$

Lösung: Man kann die Funktion F auch in der Form $f(x,y) = x(\ln x - \ln y)$ schreiben. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln x - \ln y + 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x}{y^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{1}{y}.$$

Somit ist die Hessematrix gegeben durch

$$\operatorname{hess}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{y} \\ -\frac{1}{y} & \frac{x}{y^2} \end{pmatrix}.$$

5. Aufgabe 8 Punkte

Zeigen Sie explizit, dass

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^x + 2xy^2 \\ e^x + 2x^2y + z\cos y \\ e^z + \sin y \end{pmatrix}$$

die notwendige Bedingung erfüllt, um ein Potentialfeld zu sein.
Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $\vec{v}$.

Lösung:

Die notwendige Bedingung lautet $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$. Sie ist erfüllt, weil

$$\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos y - \cos y \\ 0 - 0 \\ e^x + 4xy - e^x - 4xy \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Um eine Stammfunktion von $\vec{v}$ zu finden, integrieren wir zunächst v_1 nach x und erhalten

$$u(x,y,z) = ye^x + x^2y^2 + f(y,z).$$

Differentiation dieser Funktion nach y und der Vergleich mit v_2 liefert

$$u_y(x,y,z) = e^x + 2x^2y + f_y(y,z) = e^x + 2x^2y + z\cos y = v_2(x,y,z).$$

Aus dieser Gleichung folgt $f(y,z) = z\sin y + h(z)$, also

$$u(x,y,z) = ye^x + x^2y^2 + z\sin y + h(z).$$

Schließlich liefert die Differentiation dieser Funktion nach z und der Vergleich mit v_3

$$u_z(x,y,z) = \sin y + h'(z) = e^z + \sin y.$$

Aus dieser Gleichung folgt $h(z) = e^z$. Eine Stammfunktion von $\vec{v}$ ist also

$$u(x,y,z) = ye^x + x^2y^2 + z\sin y + e^z.$$