RECHENTEIL: LÖSUNGEN

1. Partielle Differenzierbarkeit

Wir betrachten die beiden Fälle $h > 0$ und $h < 0$. Es gelten

$$\lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(h,a) - f(0,a)}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{ha}{h} = a \; \boxed{\text{2 Punkte}}$$

und

$$\lim_{h\to 0, h<0} \frac{f(h,a) - f(0,a)}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{h^2 a}{h} = 0. \; \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Also ist f in $(0,0)$ nach x differenzierbar und für $a \neq 0$ ist f in $(0,a)$ nicht nach x differenzierbar. $\boxed{\text{2 Punkte}}$ Ferner gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,a+h) - f(0,a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0. \; \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Also ist f in $(0,a), a \in \mathbb{R}$, nach y differenzierbar. $\boxed{\text{2 Punkte}}$

2. Potenzreihe

Für den Konvergenzradius R der Potenzreihe gilt

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2^k}{k^2+1}}{\frac{2^{k+1}}{(k+1)^2+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+2k+2}{2k^2+2} = \frac{1}{2}. \; \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Es folgt die Untersuchung der Randpunkte $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Mittels Liebnizkriterium erkennt man, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k(-\frac{1}{2})^k}{k^2+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$$

konvergiert $\boxed{\text{2 Punkte}}$ und aufgrund der Vorlesung weiß man, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k(\frac{1}{2})^k}{k^2+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert $\boxed{\text{2 Punkte}}$.

Daher konvergiert die Reihe für alle $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. $\boxed{\text{2 Punkte}}$

RECHENTEIL: LÖSUNGEN

3. Fluß

Es gilt

$$\operatorname{div} \vec{v}(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2. \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Unter Benutzung des Satzes von Gauß ergibt sich

$$\int_{\partial K}\int \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int\int_K\int \operatorname{div} \vec{v}(x,y,z)dxdydz \boxed{\text{1 Punkt}} =$$
$$= \int\int_K\int x^2 + y^2 + z^2 dxdydz. \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Transformiert man jetzt auf Kugelkoordinaten so wird die rechte Seite zu

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^2 r^2(\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta)r^2\sin\theta dr d\theta d\phi \boxed{\text{4 Punkte}} =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^2 r^4 \sin\theta dr d\theta d\phi \boxed{\text{1 Punkt}} =$$
$$= \frac{64}{5}\pi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = \frac{64}{5}\pi(-\cos\theta)|_0^{\pi} = \frac{128}{5}\pi. \boxed{\text{2 Punkte}}$$

4. Skalares Oberflächenintegral

Mit $\vec{x} : [0,2\pi] \times [1,2] \to \mathbb{R}^2$,

$$\vec{x}(\phi, z) = \begin{pmatrix} 4\cos\phi \\ 4\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \boxed{\text{3 Punkte}},$$

wird der Zylindermantel Z parametrisiert. Dann gilt

$$\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial z}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4\sin\phi \\ 4\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \boxed{\text{1 Punkt}} = \left|\begin{pmatrix} 4\cos\phi \\ 4\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 4. \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Somit ergibt sich

$$\int_Z\int f dO = \int_1^2\int_0^{2\pi}(1 + 16\cos\phi\sin\phi)4d\phi dz \boxed{\text{3 Punkte}} =$$
$$= \int_0^{2\pi} 4 + 64\cos\phi\sin\phi d\phi = 8\pi + [32\sin^2\phi]_0^{2\pi} = 8\pi \boxed{\text{2 Punkte}}$$

VERSTÄNDNISTEIL: LÖSUNGEN

1. Fourierreihe

Da die Funktion f gerade ist, folgt

$$b_1 = b_2 = b_7 = 0. \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Ferner gelten

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin t| dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin t dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin t dt\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left((-\cos t)|_0^{\pi} + \cos t|_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(1+1+1+1) = \frac{4}{\pi} \boxed{\text{3 Punkte}}$$

und

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin t| \cos t dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin t \cos t dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin t \cos t dt\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\sin^2 t|_0^{\pi} - \sin^2 t|_{\pi}^{2\pi}\right) = 0. \boxed{\text{3 Punkte}}$$

2. Parametrisierung

Mit $\vec{x} : [0,2] \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\boxed{\text{2 Punkte}}$,

$$\vec{x}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \boxed{\text{4 Punkte}}$$

wird die gesuchte Kugel parametrisiert.

3. WAHR oder FALSCH

1) falsch $\boxed{\text{2 Punkte}}$
2) wahr $\boxed{\text{2 Punkte}}$
3) falsch $\boxed{\text{2 Punkte}}$
4) wahr $\boxed{\text{2 Punkte}}$
Bei einer falschen Antwort werden zwei Punkte abgezogen.

VERSTÄNDNISTEIL: LÖSUNGEN

4. Kurvenintegral

Es gilt

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \cos xy - x^2 \cos xy \\ \sin xy + xy \cos xy - \sin xy - xy \cos xy \\ 2xz \cos xy - x^2 yz \sin xy - 2xz \cos xy + x^2 yz \sin xy \end{pmatrix} = 0. \boxed{\text{3 Punkte}}$$

Also ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld $\boxed{\text{1 Punkt}}$. Ferner ist $\vec{x}$ eine geschlossene Kurve $\boxed{\text{2 Punkte}}$ und somit gilt

$$\int_{\vec{x}} \vec{v} \cdot d\vec{x} = 0. \boxed{\text{2 Punkte}}$$

ALTERNATIV kann diese Aufgabe auch gelöst werden, indem man das Kurvenintegral explizit ausrechnet oder durch scharfes Hinsehen erkennt, dass $u(x,y,z) = xz \sin xy$ eine Stammfunktion von $\vec{v}$ ist (und dann wie oben argumentiert).

5. Extremwerte unter Nebenbedingungen

Als Funktion f wählen wir

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad (\text{oder } f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}). \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Die Funktion f nimmt ihr Maximum und ihr Minimum auf der Ellipse an, da die Ellipse kompakt und f stetig ist $\boxed{\text{3 Punkte}}$. Die Nebenbedingung ist

$$x^2 + xy + y^2 - 5 = 0. \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Somit muß ein Punkt, in dem f sein Maximum bzw. sein Minimum animmt, folgende Gleichungen erfüllen

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda x + \lambda y &= 0 \\ 2y + \lambda x + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 5 &= 0 \ \boxed{\text{3 Punkte}} \end{aligned}$$

bzw., im Fall $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda x + \lambda y &= 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lambda x + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 5 &= 0. \end{aligned}$$