RECHENTEIL: LÖSUNGEN

1. Potenzreihe

Für den Konvergenzradius R der Potenzreihe gilt

$$R = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}}{\frac{(-1)^{m+1}}{(2(m+1)+1)!}}\right| = \lim_{m\to\infty}\frac{(2m+3)!}{(2m+1)!} = \lim_{m\to\infty}(2m+3)(2m+2) = \infty. \ \boxed{\text{4 Punkte}}$$

2. Maxima/Minima

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy + 8x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 2y - 4 \quad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

und

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x,y) = 4y + 8, \qquad \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x,y) = 4x, \qquad \frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x,y) = 2. \quad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Somit gilt

$$\mathrm{grad}_{(x,y)}\, f = 0 \Longleftrightarrow \begin{array}{l} 4xy + 8x = 0 \\ 2x^2 + 2y - 4 = 0 \end{array} \quad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

und kritische Punkte sind daher

$$(0,2), \quad (2,-2), \quad (-2,-2). \quad \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Die Hessematrix von f ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 4y+8 & 4x \\ 4x & 2 \end{pmatrix}. \ \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Nun ist die Determinante der Hessematrix von f im Punkt $(0,2)$ gleich 32 und der rechte untere Eintrag (der linke obere Eintrag) ist ebenfalls größer Null. Daher liegt im Punkt $(0,2)$ ein Minimum vor. $\boxed{\text{2 Punkte}}$

Die Determinante der Hessematrix von f im Punkt $(2,-2)$ ist -64, daher liegt in $(2,-2)$ ein Sattelpunkt (bzw. kein Extremum) vor. $\boxed{\text{2 Punkte}}$

Die Determinante der Hessematrix von f im Punkt $(-2,-2)$ ist -64, daher liegt in $(-2,-2)$ ein Sattelpunkt (bzw. kein Extremum) vor. $\boxed{\text{2 Punkte}}$

RECHENTEIL: LÖSUNGEN

3. Fluß

Die Fläche F ist eine zur xy-Ebene parallele Kreisscheibe mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$. Für die richtige Zeichnung gibt es $\boxed{\text{2 Punkte}}$.
Eine mögliche Parametrisierung ist $\vec{\Phi} : [0,2] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} u\sin v \\ u\cos v \\ 1 \end{pmatrix}. \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Dann gilt

$$\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} u\cos v \\ -u\sin v \\ 0 \end{pmatrix} \boxed{\text{2 Punkte}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -u \end{pmatrix}. \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Und es gilt

$$\iint\limits_F \vec{v}\cdot d\vec{O} = \int_0^2\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} u\cos v\sin(u\sin v) \\ \cos(u\sin v) \\ u^2\sin v\cos v \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -u \end{pmatrix} dvdu \boxed{\text{2 Punkte}} =$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} -u^3\sin v\cos v dvdu = 0. \boxed{\text{2 Punkte}}$$

RECHENTEIL: LÖSUNGEN

4. Stokes

Die Menge E ist die obere Hälfte eines Ellipsoiden mit Mittelpunkt in Null mit den Halbachen der Länge $\sqrt{2}$ in x-Richtung, 2 in y-Richtung und 3 in z-Richtung. Für die richtige Zeichnung gibt es $\boxed{\text{2 Punkte}}$.
Die Schnittmenge von E mit der xy-Ebene ist eine Ellipse in der xy-Ebene mit Mittelpunkt Null und den Halbachsen der Länge $\sqrt{2}$ in x-Richtung und 2 in y-Richtung. Für die richtige Zeichnung gibt es $\boxed{\text{2 Punkte}}$.
Wir benutzen den Satz von Stokes. Dazu parametrisieren wir zunächst die Randkurve der o.g. Ellipse mittels $\vec{x} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix}. \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Die Randkurve wird also im mathematisch positiven Sinn durchlaufen. Die dazu passende Normalenrichtung (für den Satz von Stokes) ist diejenige, die vom Ellipsoiden weg nach aussen zeigt. Ist dies richtig in die Zeichnung eingetragen gibt es $\boxed{\text{2 Punkte}}$.

Nun ergibt sich durch Anwendung des Satzes von Stokes

$$\iint\limits_E \operatorname{rot}\vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_{\vec{x}} \vec{v} \cdot d\vec{s} =$$

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\sin t\cos t + 2\sin t \\ -\sqrt{2}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \; \boxed{\text{2 Punkte}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} -4\sin^2 t\cos t - 2\sqrt{2}dt = \left[-\frac{4}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi} - 4\pi\sqrt{2} = -4\pi\sqrt{2}. \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Bemerkung:
Wählt man eine Parametrisierung, die die Randkurve in mathematisch negativem Sinn durchläuft, so erhält man $4\pi\sqrt{2}$ als Ergebnis und in der Zeichnung muss als die dazu passende Normalenrichtung diejenige eingetragen sein, die in den Ellipsoiden hinein zeigt.

VERSTÄNDNISTEIL: LÖSUNGEN

1. Fourierreihe

Die Funktion f ist gerade. $\boxed{\text{1 Punkt}}$ Ferner gilt

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dt = 2 \ \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Alle anderen Fourierkoeffizienten sind gleich Null. $\boxed{\text{2 Punkte}}$
Die Parsevalsche Gleichung ergibt in diesem Fall

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 1\ dt = 2 = \frac{a_0^2}{2} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \ \boxed{\text{2 Punkte}}$$

2. Ableitung
Es ist

$$\vec{g}(f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} xy+z \\ (xy+z)^2 \\ \frac{1}{(xy+z)^2+1} \end{pmatrix}. \ \boxed{\text{4 Punkte}}$$

Und so ergibt sich

$$(\vec{g}\circ f)'(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & 1 \\ 2xy^2+2yz & 2x^2y+2xz & 2xy+2z \\ -\frac{2xy^2+2yz}{((xy+z)^2+1)^2} & -\frac{2x^2y+2xz}{((xy+z)^2+1)^2} & -\frac{2xy+2z}{((xy+z)^2+1)^2} \end{pmatrix}. \ \boxed{\text{6 Punkte}}$$

ODER man rechnet mit der Kettenregel. Dazu bestimmt man zunächst

$$f'(x,y,z) = (y \quad x \quad 1) \quad \text{und } \vec{g}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ -\frac{2t}{(t^2+1)^2} \end{pmatrix}. \ \boxed{\text{4 Punkte}}$$

Mittels Kettenregel gilt dann

$$(\vec{g}\circ f)'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(xy+z) \\ -\frac{2(xy+z)}{((xy+z)^2+1)^2} \end{pmatrix} (y \quad x \quad 1) =$$

$$= \begin{pmatrix} y & x & 1 \\ 2xy^2+2yz & 2x^2y+2xz & 2xy+2z \\ -\frac{2xy^2+2yz}{((xy+z)^2+1)^2} & -\frac{2x^2y+2xz}{((xy+z)^2+1)^2} & -\frac{2xy+2z}{((xy+z)^2+1)^2} \end{pmatrix}. \ \boxed{\text{6 Punkte}}$$

VERSTÄNDNISTEIL: LÖSUNGEN

3. WAHR oder FALSCH

1) falsch $\boxed{\text{2 Punkte}}$
2) falsch $\boxed{\text{2 Punkte}}$
3) falsch $\boxed{\text{2 Punkte}}$
4) wahr $\boxed{\text{2 Punkte}}$
5) falsch $\boxed{\text{2 Punkte}}$
6) falsch $\boxed{\text{2 Punkte}}$
Bei einer falschen Antwort werden zwei Punkte abgezogen.

4. Partielle Differenzierbarkeit

Für die Folge $(\frac{1}{n}, 0)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0 = f(0,0) \; \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Daher ist f nicht stetig in Null. Also ist f stetig in $\mathbb{R}^2 \setminus \binom{0}{0}$. $\boxed{\text{2 Punkte}}$

Es ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2}}{h} = \infty \; \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Daher ist f in Null nicht partiell nach x differenzierbar. Also ist f in $\mathbb{R}^2 \setminus \binom{0}{0}$ partiell nach x differenzierbar. $\boxed{\text{2 Punkte}}$

Es ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{h^2}}{h} = -\infty \; \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Daher ist f in Null nicht partiell nach y differenzierbar. Also ist f in $\mathbb{R}^2 \setminus \binom{0}{0}$ partiell nach y differenzierbar. $\boxed{\text{2 Punkte}}$

In $\binom{0}{0}$ ist f nicht total differenzierbar, da f nicht stetig ist in $\binom{0}{0}$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$