Juli-Vollklausur – Analysis II für Ingenieure – Lösungen – Rechenteil

1. Aufgabe (5 Punkte)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+(xy)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+(xy)^2}.$$

$\operatorname{grad} f(1,2) = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5})^T$.

Richtungsvektor der Winkelhalbierenden ist z.B. $\vec{v} = (1,1)^T$.

Richtungsableitung von f an der Stelle $(1,2)$ in Richtung $\vec{v}$

$$\operatorname{grad} f(1,2) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}.$$

2. Aufgabe (5 Punkte)

Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f = \vec{v}$,d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^2 \cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^{2z} + 2y \sin x, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2ye^{2z}.$$

1. Gleichung: $\Rightarrow\ f(x,y,z) = y^2 \sin x + c(y,z)$.
2. Gleichung: $\Rightarrow\ \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = e^{2z}\ \Rightarrow\ f(x,y,z) = y^2 \sin x + ye^{2z} + d(z)$.
3. Gleichung: $\Rightarrow\ \frac{\partial d}{\partial z}(z) = 0\ \Rightarrow\ f(x,y,z) = y^2 \sin x + ye^{2z} + k$.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Kandidaten für Extremstellen im Inneren:

$$\operatorname{grad} f = \vec{0} \Leftrightarrow 4(x-1) = 0,\ 10y = 0 \Leftrightarrow x = 1, y = 0.$$

$(1,0)$ ist der einzige kritische Punkt im Inneren.

Kandidaten für Extremstellen auf dem Rand $g(x,y) = x^2 + 5y^2 - 9 = 0$:

$$\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g,\ g = 0 \Leftrightarrow 4(x-1) = \lambda 2x,\ 10y = \lambda 10y,\ x^2 + 5y^2 - 9 = 0.$$

Aus der 2. Gleichung folgt $y = 0$ oder $\lambda = 1$.

Für $y = 0$ ergibt die 3. Gleichung $x = \pm 3$.

Für $\lambda = 1$ ergibt die 2. Gleichung $x = 2$ und die 3. Gleichung $y = \pm 1$.

Kandidaten für Extremstellen auf dem Rand sind also $(3,0)$, $(-3,0)$, $(2,1)$ und $(2,-1)$.

$f(1,0) = 0,\ f(3,0) = 8,\ f(-3,0) = 32,\ f(2,1) = 7 = f(2,-1)$.

$f(1,0) = 0$ ist globales Minimum, $f(-3,0) = 32$ globales Maximum.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Parametrisierung der Kurve: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Vektorielles Bogenelement: $\vec{ds} = \dot{\vec{x}}(t)\,dt = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix} dt$.

$$\int\limits_{\vec{c}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int\limits_0^{2\pi} \underbrace{\begin{pmatrix} t + \sin^2 t \\ \cos t \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix}} dt = \int\limits_0^{2\pi} t + 1\,dt = 2\pi(\pi + 1).$$

5. Aufgabe (9 Punkte)

Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse ist $(0,0)$,
Schnittpunkt des Kreises mit der positiven x-Achse ist $(\sqrt{2}, 0)$.

Einsetzen von $x^2 = y$ in die Kreisgleichung ergibt $y + y^2 = 2 \Rightarrow y = 1 \vee y = -2$.Schnittpunkt der Parabel mit dem Kreis im 1. Quadranten ist deshalb $(1,1)$.

Bereichsbeschreibung: $B = \{(x,y) \mid \underbrace{0 \le y \le 1}, \underbrace{\sqrt{y} \le x \le \sqrt{2 - y^2}}\}$

(Schnittpunkte und Bereich müssen nicht explizit dastehen, es zählt die „Erkenntnis“.)

$$\begin{aligned}\iint\limits_B x\,dx\,dy &= \int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} x\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}x^2 \Big|_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} dy = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}(2 - y^2 - y)\,dy \\ &= y - \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{4}y^2 \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

Alternativrechnung:

$B = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\} \cup \{(x,y) \mid 1 \le x \le \sqrt{2},\ 0 \le y \le \sqrt{2 - x^2}\}$

$$\begin{aligned}\iint\limits_B x\,dx\,dy &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x\,dy\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} x\,dy\,dx = \int\limits_0^1 xy \Big|_0^{x^2} dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} xy \Big|_0^{\sqrt{2-x^2}} dx \\ &= \int\limits_0^1 x^3\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} x\sqrt{2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 - \frac{1}{3}\left(\sqrt{2 - x^2}\right)^3 \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

6. Aufgabe (5 Punkte)

$\dot{\vec{c}}(t) = (\cos \ln t \cdot \frac{1}{t}\,,\ -\sin \ln t \cdot \frac{1}{t}) = \frac{1}{t}(\cos \ln t\,,\ -\sin \ln t)$

Skalares Bogenelement: $ds = |\dot{\vec{c}}(t)|\,dt = \frac{1}{t}\sqrt{(\cos \ln t)^2 + (\sin \ln t)^2}\,dt = \frac{1}{t}\,dt$

$L = \int\limits_{\vec{c}} 1\,ds = \int\limits_1^e \frac{1}{t}\,dt = \ln t \Big|_1^e = 1$