Juli-Vollklausur – Analysis II für Ingenieure – Lösungen – Verständnisteil

1. Aufgabe (7 Punkte)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2+0^2}-0}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

An allen anderen Stellen gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)-x^3\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Für die Folge $(0,\frac{1}{n})$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}(0,\tfrac{1}{n}) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(0,\tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht stetig im Punkt $(0,0)$.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Der Körper ist $K = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2 \le z \le 1\}$ (für die Erkenntnis).

Mit dem Satz von Gauß und Zylinderkoordinaten erhält man für das Flussintegral

$$\underbrace{\iint\limits_{\partial K} \begin{pmatrix} \frac{x^3}{3} \\ \frac{y^3}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\vec{O}} = \iiint\limits_K \operatorname{div} \begin{pmatrix} \frac{x^3}{3} \\ \frac{y^3}{3} \\ 0 \end{pmatrix} dV = \iiint\limits_K x^2+y^2\, dV$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\rho^2}^1} \underbrace{\rho^2} \cdot \underbrace{\rho\, dz\, d\varphi\, d\rho} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3(1-\rho^2)\, d\varphi\, d\rho$$

$$= \int_0^1 2\pi\rho^3(1-\rho^2)\, d\rho = 2\pi\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\Big) = \frac{\pi}{6}.$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Die Kurve, die rotiert werden soll, ist $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$, und wegen der Rotation reicht es $t \ge 0$ zu betrachten . Eine mögliche Parametrisierung ist also

$$\vec{x}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Alternativen:

$$\vec{x}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ t^2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},\ 0 \le \varphi \le \pi \quad \text{oder} \quad \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}, u,v \in \mathbb{R}.$$

4. Aufgabe (7 Punkte)

$\partial A = A$, A ist abgeschlossen.

$\partial B = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\} \cup \{(x,y)\,|\,x^2+y^2=3\}$,

B ist abgeschlossen und beschränkt.

$\partial C = \{(x,y)\,\big|\,|x|=|y|\,\} = \{(x,y)\,\big|\,y=x\} \cup \{(x,y)\,\big|\,y=-x\}$, C ist offen.

5. Aufgabe (6 Punkte)

a) Für $b=0$ ist f gerade.

b) Für $a=c=0$ ist f ungerade.

c) Wenn weder $b=0$ noch $a=c=0$ gilt ist f weder gerade noch ungerade.

Mögliche Begründungen:

a) $b=0 \;\Rightarrow\; f(x)=a+c\cos 2x \;\Rightarrow\; f(-x)=a+c\cos(-2x)=a+c\cos 2x=f(x)$
$\Rightarrow\; f$ ist gerade.

b) $a=c=0 \;\Rightarrow\; f(x)=b\sin x \;\Rightarrow\; f(-x)=b\sin(-x)=-b\sin x=-f(x)$.
$\Rightarrow\; f$ ist ungerade.

c) f gerade $\Rightarrow\; 0=f(\frac{\pi}{2})-f(-\frac{\pi}{2})=(a+b-c)-(a-b-c)=2b \;\Rightarrow\; b=0$.
f ungerade $\Rightarrow\; 0=f(0)=a+c \wedge 0=f(\frac{\pi}{2})+f(-\frac{\pi}{2})=(a+b-c)+(a-b-c)=2(a-c)$
$\Rightarrow\; a=c=0$.

6. Aufgabe (4 Punkte)

a) falsch

b) falsch

c) wahr

d) wahr