Oktober-Vollklausur – Analysis II für Ingenieure – Lösungen – Rechenteil

1. Aufgabe (9 Punkte)

$$\text{grad} f = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad e^{x-y} \cdot y(1+x) = 0, \;\; e^{x-y} \cdot x(1-y) = 0$$

Eine Lösung ist $(0,0)$.
Für $(x,y) \neq (0,0)$ erhält man : $1+x=0, \;\; 1-y=0$ mit der Lösung $(-1,1)$.
Kritische Punkte : $(0,0)$ und $(-1,1)$.
Hessematrix: $H_f(x,y) = e^{x-y} \begin{pmatrix} y(x+2) & (1+x)(1-y) \\ (1+x)(1-y) & (y-2)x \end{pmatrix}$
Es ist $\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} < 0.$
Folglich liegt in $(0,0)$ ein Sattelpunkt vor.
Es ist $\det H_f(-1,1) = e^{-4} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) > 0.$
Folglich hat f in $(-1,1)$ ein lokales Minimum.

2. Aufgabe (8 Punkte)
Die linke Seite des Dreiecks liegt auf der Geraden $y = x$, die rechte auf der Geraden $y = 2 - x$.
Bereichsbeschreibung: $B = \{(x,y) \,|\, 0 \leq y \leq 1, \, y \leq x \leq 2-y\}$

$$\iint\limits_B xy^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \int_y^{2-y} xy^2 \, dx \, dy = \int_0^1 y^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{2-y} dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\left[(2-y)^2 - y^2\right] dy$$

$$= 2\int_0^1 (y^2 - y^3)\, dy = 2\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

3. Aufgabe (7 Punkte)
Die Fortsetzung ist eine ungerade Funktion.
Folglich: $a_k = 0, \;\; k = 0,1,2,...$ und $b_k = \frac{4}{2\pi} \int\limits_0^\pi f(t) sin(kt)\, dt, \;\; k = 1,2,...$
Mittels partieller Integration erhält man:
$b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi (\pi - t) \sin kt \, dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k}(t-\pi)\cos kt\Big|_0^\pi - \frac{1}{k}\int\limits_0^\pi \cos kt \, dt\right] = \frac{2}{k\pi}\Big[(t-\pi)\cos kt\Big]_0^\pi$
$= \frac{2}{k} \quad k = 1,2,...$
Das $n-$ te Fourierpolynom ist $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \sin kx\,.$

4. Aufgabe (8 Punkte)
Quadratischer Abstand: $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-12)^2$
Nebenbedingung: $g(x,y) = y^2 - 6x = 0.$

$$\text{grad} f = \lambda \text{grad} g, \; g = 0 \; \Leftrightarrow \; 2(x-3) = -6\lambda, \;\; 2(y-12) = \lambda 2y, \;\; y^2 - 6x = 0.$$

Aus der 2. Gleichung folgt $y \neq 0$ und $\lambda = \frac{y-12}{y}$.
Aus der 3. Gleichung erhält man $x = \frac{y^2}{6}$.

In die 1. Gleichung eingesetzt: $2(\frac{y^2}{6} - 3) + 6 \cdot \frac{y-12}{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^3 = 6^3$
Folglich: $y = 6$ und $x = 6$.
Es ist $\text{grad}g = (-6, 2y)^T \neq \vec{0}$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Ergebnis: Der Punkt mit dem kürzesten Abstand ist der Punkt $(6, 6)$.

5. Aufgabe (8 Punkte)

Es ist $\vec{v}(\vec{x}(u, v)) = \begin{pmatrix} u \sin v \\ -u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{pmatrix}$.

Damit erhält man

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} u \sin v \\ -u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{pmatrix} du\, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 u\, du\, dv = \pi.$$