Oktober-Vollklausur – Analysis II für Ingenieure – Lösungen – Verständnisteil

1. Aufgabe (8 Punkte)

Jeder Punkt der Kurve $\begin{pmatrix} t \\ 1+\frac{t}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugt bei der Rotation um die x-Achse einen Kreis (mit dem Radius $1+\frac{t}{3}$) parallel zur yz-Ebene.
Eine mögliche Parametrisierung ist somit

$$\vec{x}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t \\ (1+\frac{t}{3})\cos\varphi \\ (1+\frac{t}{3})\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

2. Aufgabe (5 Punkte)

$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0,1],\; y \in [2,3]\; z \in [4,8]\}$
Mit dem Satz von Gauß erhält man für das Flussintegral

$$\iint\limits_{\partial Q} \begin{pmatrix} 2z \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\vec{O} \;=\; \iiint\limits_{Q} \operatorname{div} \begin{pmatrix} 2z \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix} dV \;=\; \iiint\limits_{Q} 1\, dV$$
$$= \; 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4 \quad \text{(Volumen des Quaders)}$$

3. Aufgabe (5 Punkte)

$f(x,y) = (x+1)\sin x + \sin y$

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \sin x + (x+1)\cos x \\ \cos y \end{pmatrix}, \quad \operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Anstieg ist Null in den Richtungen $\vec{a} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ mit $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \rangle = s+t = 0$,
also für $s = -t$
In den beiden Richtungen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der Anstieg gleich Null.

4. Aufgabe (5 Punkte)
Es ist

$$\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ 2x & z^2 & 2yz \\ 0 & 2yz & y^2 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}\,'$ ist symmetrisch (bzw. $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$) genau dann, wenn $f_y = 2x$ und $f_z = 0$ sind.
Folglich: $f(x,y,z) = 2xy + h(x)$ mit $h(x)$ differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}$.

5. Aufgabe (9 Punkte)

A: nicht offen, abgeschlossen, konvex.
B: offen, nicht abgeschlossen, nicht konvex.
C: nicht offen, abgeschlossen, nicht konvex.

6. Aufgabe (8 Punkte)

a) falsch

b) wahr

c) falsch

d) wahr