TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2005/2006
Fakultät II - Mathematik 20.2.2006
Dozenten: Prof. Dr. G. Bärwolff, Prof. Dr. F. Tröltzsch
Assistent: K. Bauer

Musterlösung Februar-Vollklausur Rechenteil WS 2005/06
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (9 Punkte)

f ist stetig, D kompakt, also wird das globale Maximum und Minimum angenommen.

Betrachte zunächst das Innere von D: $f'(x,y) = (x+1, 2y-1) \overset{!}{=} (0,0) \Rightarrow x = -1,\ y = \frac{1}{2}$.

Betrachte nun den Rand von D. Benutze hierfür die Funktion $g(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2 - 3 \overset{!}{=} 0$.

1. Fall : $g'(x,y) = (x, 2y) \overset{!}{=} (0,0) \Rightarrow x = y = 0$. Dies widerspricht aber der Gleichung $g(x,y) = 0$.
2. Fall : $f'(x,y) = \lambda g'(x,y) \Leftrightarrow x(1-\lambda) = -1,\ 2y(1-\lambda) = 1$. Es gilt also $\lambda \neq 1$ und damit: $x = -\frac{1}{1-\lambda},\ y = \frac{1}{2(1-\lambda)}$, also $y = -\frac{x}{2}$. In g eingesetzt liefert dies: $g(x,y) = g(x, -\frac{x}{2}) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} - 3 = \frac{3x^2}{4} - 3 \overset{!}{\Longrightarrow} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \mp 1$.

Wenn wir die drei Kandidaten in die Funktion einsetzen sehen wir:
$f(-1, \frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$ (globales Minimum) , $f(2,-1) = 6$ (globales Maximum) , $f(-2,1) = 0$.

2. Aufgabe (9 Punkte)

B ist die Achtelkugel im ersten Oktanten.
Wir verwenden zur Berechnung des Integrals Kugelkoordinaten $(x,y,z) = (r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta))$.
Es gilt: $\operatorname{div}(\vec{v}) = y^2 + x^2 + z^2 = r^2$, $dV = dxdydz = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$. Damit gilt mit dem Satz von Gauß:

$$\iint\limits_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iiint\limits_{B} \operatorname{div}(\vec{v}) dV = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^4 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) = \frac{\pi}{2}(\frac{r^5}{5}|_0^1)(-\cos(\theta)_0^{\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{10}.$$

3. Aufgabe (8 Punkte)

K ist eine Kegelfläche mit der Einheitskreisscheibe als Grundfläche und $(0,0,1)^T$ als Spitze.

Parametrisiere nun die Fläche K. $\vec{F} : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 1-r \end{pmatrix}$.

Dann gilt: $\frac{\partial \vec{F}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -1 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow dO = |\frac{\partial \vec{F}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial \varphi}| dr d\varphi = \left| \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \right| dr d\varphi$
$= \sqrt{r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi) + r^2 dr d\varphi} = \sqrt{2} r dr d\varphi.$

Damit berechnet sich der Flächeninhalt der Fläche K: $\iint\limits_K dO = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2} r d\varphi dr = 2\sqrt{2}\pi \frac{r^2}{2}|_0^1 = \sqrt{2}\pi.$

4. Aufgabe (7 Punkte)

$f(0,0) = 1,\ f'(x,y) = (-\sin(x)e^y, \cos(x)e^y) \Rightarrow f'(0,0) = (0,1)$,
$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos(x)e^y & -\sin(x)e^y \\ -\sin(x)e^y & \cos(x)e^y \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Das Taylorpolynom lautet also: $f(0,0) + f'(0,0)\binom{x}{y} + \frac{1}{2}(x,y)H_f(0,0)\binom{x}{y} = 1 + (0,1)\binom{x}{y} + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\binom{x}{y} = 1 + y + \frac{1}{2}(-x^2 + y^2)$.

5. Aufgabe (7 Punkte)

Verwende Polarkoordinaten: $(x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \Rightarrow dxdy = r dr d\varphi$. Dann gilt

$$\iint\limits_B xy dx dy = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos(\varphi) r\sin(\varphi) r d\varphi dr = \int_0^2 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)\sin(\varphi) d\varphi = \int_0^2 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2\varphi) d\varphi$$
$$= (\frac{1}{4} r^4|_{r=0}^2)(-\frac{1}{4}\cos(2\varphi)|_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}) = 2.$$