TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2005/2006
Fakultät II - Mathematik 20.2.2006
Dozenten: Prof. Dr. G. Bärwolff, Prof. Dr. F. Tröltzsch
Assistent: K. Bauer

Musterlösung Februar-Vollklausur Verständnisteil WS 2005/06 Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

a) Es handelt sich um eine Ellipse mit Halbachsen 2 und $\sqrt{2}$. (Die Ungleichung $x < 100$ kann weggelassen werden, da sie die Menge nicht verändert.)
A ist nicht offen aber abgeschlossen (da der Rand ∂A ganz in A enthalten ist) und beschränkt und damit kompakt.
Die Menge der Randpunkte ist der Rand der Ellipse $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 4\}$.

b) B ist ein Kreisring-Gebiet mit innerem Radius 1 und äusserem Radius 2.
Da der innere Kreisrand zur Menge gehört, der äussere jedoch nicht, ist B weder offen noch abgeschlossen und damit auch nicht kompakt.
Die Menge der Randpunkte ist: $\partial B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Die Koeffizienten der Potenzreihe lauten: $a_n = (-1)^n b_n$. Damit gilt für den Konvergenzradius: $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{(-1)^{n+1} b_{n+1}}{(-1)^n b_n}|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{b_{n+1}}{b_n}|} = \frac{1}{\frac{|\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1}|}{|\lim\limits_{n\to\infty} b_n|}} = \frac{1}{\frac{3}{3}} = 1$. Damit konvergiert die Potenzreihe in jedem Fall für alle $x \in]1,3[$. Untersuche nun die Randpunkte:
Für $x = 1$ $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n (-1)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right)$ und $x = 3$ $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n (1)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n\right)$ divergiert die Reihe, da das notwendige Kriterium $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \stackrel{!}{=} 0$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n b_n \stackrel{!}{=} 0$ nicht erfüllt ist.
Somit ist die Potenzreihe für alle $x \in]1,3[$ konvergent und sonst divergent.

3. Aufgabe (6 Punkte)

a) (Skizze) . f ist stetig und stückweise monoton, also konvergiert die Fourierreihe von f überall gegen f.

b) Setze $x = 0$ ein . Dann gilt mit a):
$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)0)}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4. Aufgabe (10 Punkte)

Es gilt: $\mathrm{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Um den Satz von Stokes anwenden zu können definieren wir ein Gebiet B, dessen Rand ∂B von der Kurve γ durchlaufen wird.
Die einfachste Möglichkeit ist: $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1\}$. Parametrisiere nun B:

$$\vec{F} : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} 2r\cos(\varphi) \\ 3r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \vec{F}}{\partial r} = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi) \\ 3\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix},\quad \frac{\partial \vec{F}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -2r\sin(\varphi) \\ 3r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d\vec{O} = \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial \varphi}\right) dr d\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6r \end{pmatrix} dr d\varphi.$$

Damit gilt mit dem Satz von Stokes: $\int\limits_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int\limits_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \iint\limits_{B} \mathrm{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{O} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6r \end{pmatrix} d\varphi dr = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} 0 d\varphi dr = 0$.

5. Aufgabe

(9 Punkte)

Es gilt: $\mathrm{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, da der $\mathbb{R}^3$ konvex ist, ist $\vec{v}$ also ein Potentialfeld . Das Potential kann man schon durch scharfes Hinsehen erkennen: $u(x, y, z) = -(x^2 + y^2 + z^2)$. Damit gilt:
$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = u(\vec{\gamma}(0)) - u(\vec{\gamma}(\pi)) = u(0, 0, 0) - u(\pi, 0, 0) = \pi^2$.