TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2005/2006
Fakultät II - Mathematik 10.4.2006
Dozenten: Prof. Dr. G. Bärwolff, Prof. Dr. F. Tröltzsch
Assistent: K. Bauer

Musterlösung April-Vollklausur Rechenteil WS 2005/06
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

a) (Skizze)

b) f ist ungerade, also gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter gilt: $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-2)\sin(kx)dx = \frac{4}{k\pi}\cos(kx)|_0^{\pi} = \frac{4}{k\pi}((-1)^k - 1)$.
Damit lautet die Fourierreihe von f: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k\pi}((-1)^k - 1)\sin(kx) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{-8}{(2l+1)\pi}\sin((2l+1)x)$.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f partiell differenzierbar und es gilt:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)3x^2 - x^3 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ sowie $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^3 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$.
Für $(x, y) = (0, 0)$ gilt:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h} = 1$ sowie
$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$.
f ist also auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar.

3. Aufgabe (8 Punkte)

f ist stetig und D kompakt, also nimmt f auf D das globale Maximum und Minimum an.
Im Inneren von D gilt: $f'(x, y) = (2, -4) \neq (0, 0)$, also gibt es im Inneren keine kritischen Punkte.
Auf dem Rand von D, also für alle (x, y) mit $g(x, y) = 2x^2 + 8y^2 = 1$ gilt:
$g'(x, y) = (4x, 16y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$, was ein Widerspruch zur Bedingung $g(x, y) = 1$ ist.
$f'(x, y) = \lambda g'(x, y) \Leftrightarrow (2, -4) = \lambda(4x, 16y) \Leftrightarrow 2\lambda x = 1,\ 4\lambda y = -1$. Aus der Bedingung $g = 1$ folgt: $\lambda \neq 0$. Also gilt: $x = \frac{1}{2\lambda},\ y = -\frac{1}{4\lambda}$. Die Bedingung $g = 1$ liefert nun:
$g(x, y) = g(\frac{1}{2\lambda}, -\frac{1}{4\lambda}) = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2},\ y = \mp\frac{1}{4}$.
Es gibt also nur zwei kritische Punkte, die wir nun in die Funktion einsetzen:
$f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = 1 + 1 = 2$ (globales Maximum), $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -1 - 1 = -2$ (globales Minimum).

4. Aufgabe (8 Punkte)

a) (Skizze)

b) **1. Weg:** Für die Grenzen gilt: $y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$, $y = 3 - x \Leftrightarrow x = 3 - y$. Also gilt:
$\iint_B 2y\,dxdy = \int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^{3-y} 2y\,dxdy = \int_0^2 2y(3 - y - \frac{y}{2})dy = 3y^2 - y^3|_0^2 = 12 - 8 = 4$.
2. Weg: $\iint_B 2y\,dxdy = \int_0^1\int_0^{2x} 2y\,dydx + \int_1^3\int_0^{3-x} 2y\,dydx = \int_0^1 (y^2|_{y=0}^{2x})dx + \int_1^3 (y^2|_{y=0}^{3-x})dx$
$= \int_0^1 4x^2dx + \int_1^3 (3-x)^2dx = \frac{4x^3}{3}|_0^1 - \frac{(3-x)^3}{3}|_1^3 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4$.

5. Aufgabe (9 Punkte)

(Skizze)
Es gilt unter Verwendung von Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$:
$\mathrm{div}(\vec{v}) = 3x^2z + 3y^2z = 3z(x^2 + y^2) = 3zr^2$. Nach dem Satz von Gauss gilt also:
$\iint_{\partial B}\vec{v}\cdot d\vec{O} = \iiint_B \mathrm{div}(\vec{v})dV = \int_{-1}^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 3zr^2 r\,drd\varphi dz = 6\pi\int_{-1}^1 z\,dz\int_0^1 r^3dr = 0$.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2005/2006
Fakultät II - Mathematik 10.4.2006
Dozenten: Prof. Dr. G. Bärwolff, Prof. Dr. F. Tröltzsch
Assistent: K. Bauer

Musterlösung April-Vollklausur Verständnisteil WS 2005/06 Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

a) (Skizze)
A ist weder offen noch abgeschlossen, da weder $\partial A \subset A$ noch $\partial A \cap A = \emptyset$ erfüllt ist.
Da A nicht abgeschlossen ist, ist A auch nicht kompakt.

b) (Skizze)
B ist wegen $\partial B \subset B$ abgeschlossen und nicht offen, da $\partial B \cap B = \partial B \neq \emptyset$.
Da B jedoch nicht beschränkt ist, ist B nicht kompakt.

2. Aufgabe (9 Punkte)

Es gilt: $f(0,0) = (0,0)$ und $f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & -2ye^{y^2} \\ -2xe^{x^2} & e^y \end{pmatrix} \Rightarrow f'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nach der Kettenregel erhalten wir also:

$(f \circ f)'(0,0) = f'(f(0,0)) \cdot f'(0,0) = f'(0,0) \cdot f'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Aufgabe (7 Punkte)

$\vec{v}$ hat die Funktion f als Stammfunktion , also gilt:
$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = f(\vec{\gamma}(\pi)) - f(\vec{\gamma}(0)) = f(\pi, \pi^2 + \pi, -\pi^2) - f(0,0,0) = \pi^3 e^{\cos(\pi)} e^{\sin(\pi)} = \frac{\pi^3}{e}$.

4. Aufgabe (8 Punkte)

a) B ist nicht konvex, da z.B die Verbindungsstrecke der Punkte $(2,0,0)$, $(-2,0,0) \in B$ durch den Ursprung $(0,0,0)$ geht und somit nicht ganz in B enthalten ist.

b) B ist zwar nicht konvex, dies ist jedoch nur ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Potentials, *kein notwendiges.*
Ein Potential u von $\vec{v}$ kann man durch scharfes Hinsehen oder durch eine kurze Rechnung ermitteln: $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. $\vec{v}$ besitzt also ein Potential.
Dass B nicht konvex ist stört $\vec{v}$ in diesem Fall nicht weiter. $\vec{v}$ ist nämlich rotationsfrei (kurze Rechnung) und lässt sich problemlos auf den gesamten $\mathbb{R}^3$ fortsetzen (der ja konvex ist). Also besitzt $\vec{v}$ ein Potential.

5. Aufgabe (8 Punkte)

a) (Skizze)

b) Für die partiellen Ableitungen von $\vec{x}$ gilt: $\frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ e^r \end{pmatrix}$ und $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Somit spannen $\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e \end{pmatrix}$ und $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Tangentialebene von F im Punkt $\vec{x}(1,0)$ auf. Wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -e \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -e \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ steht $\begin{pmatrix} -e \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ also senkrecht auf die Tangentialebene.