Juli-Vollklausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungen – Rechenteil

1. Aufgabe 9 Punkte

$\text{grad} f = \vec{0}$ liefert das Gleichungssystem

$y = 0$
$x + 1 = 0$

Einziger kritische Punk ist $(-1, 0)$,

und wegen $\det H_{(x,y)} f = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$

liegt in $(-1, 0)$ ein Sattelpunkt vor.

Wegen $\lim\limits_{x \to \infty} f(x, 1) = \infty$ hat f kein globales Maximum.

Da f stetig und D kompakt ist, nimmt f auf D einen kleinsten Funktionswert an.

$\text{grad} f = \lambda \, \text{grad} g$ und die Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ ergeben das Gleichungssystem

$y \;= \lambda \cdot 2x$
$x + 1 = \lambda \cdot 2y$
$x^2 + y^2 - 1 = 0$

Die erste Gleichung in die zweite eingesetzt ergibt:

$x(1 - 4\lambda^2) = -1$

Folglich: $1 - 4\lambda^2 \neq 0$, $\quad x = \frac{-1}{1-4\lambda^2}$ und $y = \frac{-2\lambda}{1-4\lambda^2}$

In die dritte Gleichung eingesetzt ergibt das

$\frac{1+4\lambda^2}{(1-4\lambda^2)^2} = 1 \iff 0 = 4\lambda^2(-3 + 4\lambda^2)$

Folglich $\lambda = 0$ oder $\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Kritische Punkte sind somit $(-1, 0)$ und $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ mit den Funktionswerten

$f(-1, 0) = -1$, $f(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - 1$,

und $f(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1$ (kleinster Funktionswert auf D)

Es ist $\text{grad} g = \vec{0}$ nur für $(x, y) = (0, 0)$, aber $(0, 0) \notin \partial D$

2. Aufgabe 5 Punkte

Der Integrationsbereich ist die obere Hälfte der Einheitskreisfläche:

$\phi \in [0, \pi]$, $r \in [0, 1]$.

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dydx = \int_0^\pi \int_0^1 \frac{1}{1+r^2} \cdot r \, drd\phi = \pi \cdot \frac{1}{2} \ln(1 + r^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \cdot \ln 2$$

3. Aufgabe 8 Punkte

Es ist $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$ und $\dot{\vec{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\vec{c}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin^2 t + \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) dt = 2\pi$$

4. Aufgabe 8 Punkte

Eine Parametrisierung von F

für $(u,v) \in B := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le u \le 2,\ \frac{u}{2} \le v \le 2u\}$ ist

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2u+2v \end{pmatrix}. \qquad \text{Es ist} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} = 3$$

$$\iint_F dO = \iint_B dudv = \int_1^2 \int_{\frac{u}{2}}^{2u} 3\, dvdu = 3 \int_0^2 (\tfrac{3}{2}u)\, du$$

$$= 3 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 4 = 9$$

5. Aufgabe 5 Punkte

Mit dem Ansatz

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2z^2x + y\cos x + e^z$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + e^y$

$\frac{\partial u}{\partial z} = 2zx^2 + xe^z$

erhält man:

$u(x,y,z) = z^2x^2 + y\sin x + xe^z + c_1(y,z)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + \frac{\partial c_1}{\partial y}(y,z) = \sin x + e^y$

Folglich: $\frac{\partial c_1}{\partial y} = e^y$ und $c_1(y,z) = e^y + c_2(z)$

$\frac{\partial u}{\partial z} = 2zx^2 + xe^z + c_2'(z) = 2zx^2 + xe^z$

Folglich: $c_2'(z) = 0$, also $c_2(z) = const.$

Ein Potential ist somit $-u(x,y,z) = -z^2x^2 - y\sin x - xe^z - e^y$.

6. Aufgabe 5 Punkte

$$\vec{f}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 0 & \cos y \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} y-x \\ xy \end{pmatrix} \qquad \vec{g}(1,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \qquad \vec{g}\,'(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Folglich $\quad (\vec{f} \circ \vec{g})'(1,0) = \vec{f}\,'(g(1,0)) \cdot \vec{g}\,'(1,0)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$