Juli-Vollklausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungen - Verständnisteil

1. Aufgabe 6 Punkte

Es ist $\lim\limits_{k\to\infty} f(\frac{1}{k},\frac{1}{k}) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1}{k^2}}}{2\cdot\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{3} \neq f(0,0)$

D.h. f ist nicht stetig in $(0,0)$ und folglich auch nicht differenzierbar in $(0,0)$

Die partielle Ableitung existiert:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{0}{2h^2}-0}{h} = 0.$

2. Aufgabe 5 Punkte

Es ist $\sum b_k(2x-1)^k = \sum b_k 2^k (x-\frac{1}{2})^k$

Der Konvergenzradius ist $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{b_k\cdot 2^k}{b_{k+1}\cdot 2^{k+1}}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{\lim\limits_{k\to\infty} b_k}{\lim\limits_{k\to\infty} b_{k+1}}\right| = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$

Die Reihe ist also konvergent für $x \in]0\,,1[$.

Für die Randpunkte erhält man die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(-1)^k$ bzw. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$

Diese beide Reihen sind nicht konvergent, da das notwendige Kriterium $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$ nicht erfüllt ist.

3. Aufgabe 6 Punkte

Da f eine Stammfunktion von $\vec{v}$ ist:

$\int\limits_{\vec{x}} \vec{v}\cdot\vec{ds} = f(\vec{x}(2\pi)) - f(\vec{x}(0)) = \frac{1}{1+\cos^2 2\pi + (\frac{2\pi}{\pi})^2} - \frac{1}{1+1^2+0^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$

4. Aufgabe 6 Punkte

Der Integrationsbereich ist das Dreieck mit den Eckpunkten
$(1,2)$, $(4,2)$ und $(4,5)$

Man erhält $\int\limits_1^4 \int\limits_2^{x+1} f(x,y)\,dydx.$

5. Aufgabe 5 Punkte

Es ist

$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = 12(x+ay+1)^2 + 12a^2(x+ay+1)^2 + 2 \ \geq\ 2.$

D.h. die notwendige Bedingung $\operatorname{div}\vec{v} \equiv 0$ ist für kein $a \in \mathbb{R}$ erfüllt,
d.h. für kein $a \in \mathbb{R}$ besitzt $\vec{v}$ auf $\mathbb{R}^3$ ein Vektorpotential.

6. Aufgabe 6 Punkte

Eine Parametrisierung des Kegelmantels ist

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{u}{2} \cdot \cos v \\ \frac{u}{2} \cdot \sin v \\ u \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u \in [0,h], \quad v \in [0,2\pi]$$

7. Aufgabe 6 Punkte

Mit dem Satz von Gauß erhält man

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \vec{v}\, dxdydz = 3 \iiint\limits_{V} 1\, dxdydz = 3 \cdot 2\pi = 6\pi.$$

Es ist div $\vec{v} = 3$

$\iint\limits_{V} 1\, dxdydz$ ist das Volumen eines Zylinders

mit Radius $\sqrt{2}$ und Höhe 1 : $\pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 1 = 2\pi$.