Oktober-Vollklausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungen – Rechenteil

1. Aufgabe 4 Punkte

Der Richtungsvektor (normiert) ist $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1)^T$,
$\mathrm{grad}_{(x,y)} f = (2xy^2, 2x^2y-3)$
$\mathrm{grad}_{(2,1)} f = (4,5)$
Man erhält für den Anstieg
$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(2,1) = \mathrm{grad}_{(2,1)} f \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-2\cdot 4 - 1\cdot 5) = -\frac{13}{\sqrt{5}}$.
Das ist <u>nicht</u> der größte Anstieg,
denn der größte Anstieg ist $|\mathrm{grad}_{(2,1)} f| = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$.

2. Aufgabe 10 Punkte

$\mathrm{grad} f = \vec{0}$ liefert das Gleichungssystem

$2xy = 0$
$3y^2 - 1 + x^2 = 0$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 0$ oder $y = 0$.
Aus der zweiten Gleichung erhält man
fúr $x = 0 \;:\; y = \pm\sqrt{3}$
fúr $y = 0 \;:\; x = \pm 1$.
Kritische Punkte : $P_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $P_2 = (0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $P_3 = (1,0)$, $P_4 = (-1,0)$.

Es ist $\det H_{(x,y)} f = \det \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 6y \end{pmatrix} = 12y^2 - 4x^2$,

$\det H_{(x,y)} f < 0$ für P_3, P_4 (Sattelpunkte)
$\det H_{(x,y)} f > 0$ für P_1, P_2 (lokale Extrema)

Da $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$ ist, hat f in P_1 ein lokales Minimum.
Da $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \frac{1}{-\sqrt{3}}) < 0$ ist, hat f in P_2 ein lokales Maximum.
Wegen $\lim\limits_{y\to-\infty} f(0,y) = -\infty$ und $\lim\limits_{y\to+\infty} f(0,y) = +\infty$
hat f auf $\mathbb{R}^2$ keine globalen Extrema.

3. Aufgabe 5 Punkte

Es ist $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} 0+3t \\ 2+3t \end{pmatrix}$ und $\dot{\vec{c}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad t \in [0,1]$.

$$\int_{\vec{c}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 9t^2 \\ 2+3t-3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} dt = 3 \cdot \int_0^1 (9t^2+2)dt$$

$= 3\big[3t^3 + 2t\big]_0^1 = 3 \cdot 5 = 15.$

4. Aufgabe 8 Punkte

$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2}\int\limits_0^{\sqrt{2z}} r^2\cdot r\,drdzd\phi = 2\pi\int\limits_0^2 \frac{r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2z}}\,dz = 2\pi\cdot\frac{z^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{16}{3}\pi$

5. Aufgabe 6 Punkte

$$\vec{f}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x\cdot e^{y+\sin x} & e^{y+\sin x} \\ \frac{xy}{xy+1}+\ln(xy+1) & \frac{x^2}{xy+1} \\ \sqrt{y} & \frac{x}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

6. Aufgabe 7 Punkte

Konvergenzradius:
$r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}\cdot\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}\cdot 3^{n+3}} = \frac{1}{3}$.
Randpunkte:
$x = 1-\frac{1}{3}$:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{\sqrt[3]{n}}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 9\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ist konvergent (Leibniz-Kriterium). $x = 1+\frac{1}{3}$:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{\sqrt[3]{n}}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 9\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ist divergent ($\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\geq\frac{1}{n}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergent).